微分形式とその応用

曲線・曲面から解析力学まで

栗田　稔 著

現代数学社

はしがき

微分形式は，現代の数学においては基本的なものの１つで，その有効な利用によって，ある種の理論が明快になり，計算が簡単にできる．その基礎を作り，これを縦横に駆使したのはエリー・カルタン (E. Cartan 1869-1951) である．ところが，この有用な微分形式が，数学専攻でないかたがたには，未だよく知られていないようである．この本は，微分形式の基礎とその応用を多くのかたがたに知って頂くため，15回にわたって雑誌「現代数学」に連載したものを，そのまま一冊にまとめたものである．

雑誌への連載に当っては，各章ごとにある程度のまとまりが必要であるので，比較的ゆっくりしているところもあれば，適当に省略をしているところもあって，内容の叙述には精粗濃淡があり，必ずしも一様でない．また，基本的なことは，前に述べたことを，何回も繰返しているところもある．学校の講義などでは，これがふつうであるから，この本もそうしたものの筆記としてお読み頂ければ幸いである．

なお，微分形式の理論としては，ここに述べたものの先に，まだ深い理論もあり，もっと広い応用もある．ここでは，筆者が直接に手掛けた微分幾何学とその周辺への応用が示してあるだけである．しかし，この本によって，微分形式の妙味を知り，これを広く活用されるかたがたの出ることを，筆者は強く期待している次第である．

栗田　稔

目　次

序　論　微分形式とその応用

x, y の関数 $z=f(x, y)$ が C^1 級（偏導関数が存在して連続）のとき，その全微分は，

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

で与えられる．さらに一般に，x, y の連続関数 $a(x, y)$，$b(x, y)$ について，

$$\omega=a(x, y)dx+b(x, y)dy$$

で与えられる式を x, y の１次微分式（１階の微分形式）という．

変数が $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の場合についていえば，

$$\omega=\sum_{i=1}^{n}a_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)dx_i$$

が１次微分式である．

１次微分式は，線 $c: x=x(t)$，$y=y(t)$ $(t_1\leqq t\leqq t_2)$ に沿っての線積分

$$\int_c \omega=\int_c(a(x, y)dx+b(x, y)dy)$$

や，微分方程式

$$\omega=a(x, y, z)dx+b(x, y, z)dy+c(x, y, z)dz=0$$

これは偏微分方程式
$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{a}{c}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{b}{c}$

などに関連して，昔から研究されて来ているが，こうしたものが，外積，外微分といった新しい計算法をもって扱われ，現代数学における基本概念の１つとして登場してきたのは，エリー・カルタンによる．彼は，これを縦横に駆使して，積分不変式論，連続群論，微分幾何学の深い研究を行なった．とりわけ，グリーンの公式を ω の外微分 $d\omega$ を使って簡潔に表わして処理すること（9 ページ）は，空間のストークスの定理やガウスの定理にも適用されるが，これらは単に形の上のことに止らず，位相幾何学とも深い関連をもち，今日におけるコホモロジー論の端緒となっている．

エリー・カルタン
(Elie Cartan
1869-1951)

この講義では，これから十数回にわたって，１次微分式から高階の微分形式へと進み，それらの意義と計算法を明らかにし，いろいろな応用を述べていく．今回は，序論として，その大略を示すことにする．

1．１次微分式

まず，$a=a(x, y)$，$b=b(x, y)$ は x, y について連続な関数として，１次微分式

$$\omega=adx+bdy=a(x, y)dx+b(x, y)dy$$

を考える．この場合，すぐに考えられるのが，曲線

$$c : x=x(t),\ y=y(t) \quad (t_1 \leqq t \leqq t_2)$$

に沿っての線積分

$$\int_c \omega = \int_c (adx+bdy) = \int_{t_1}^{t_2} \left(a\frac{dx}{dt}+b\frac{dy}{dt}\right)dt$$

である．ここで，曲線 c については，$x=x(t)$，$y=y(t)$ は C^1 級，またはもう少し広く，そのような曲線の弧の有限個のつながりとしておく．

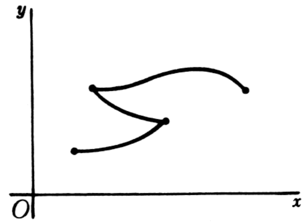


図 1

線積分の値は媒介変数のとり方には無関係である．

線積分の図形での意味を考えておくことは，大切である．いま，$a=a(x, y)$，$b=b(x, y)$ を成分にもつベクトル $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(x, y)$ を考えると，これはベクトル場 (vector field) をなしている．また，点 (x, y) の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とすると，その微小変位ベクトルは $d\boldsymbol{x}=(dx, dy)$ で，$\omega=adx+bdy$ は2つのベクトル $\boldsymbol{v}$, $d\boldsymbol{x}$ の内積 $(\boldsymbol{v}, d\boldsymbol{x})$ に等しい．いま，$\boldsymbol{v}$ と $d\boldsymbol{x}$ のなす角を θ，$|\boldsymbol{v}|=v$ とおくと，$|d\boldsymbol{x}|=ds$ (s は曲線 c 上の定点から点 $\boldsymbol{x}$ へいたる弧の長さ）であることから，

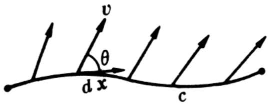


図 2

ベクトル場とは，各点に対して1つずつベクトルが存在しているもの．

$$I=\int_c \omega = \int_c (\boldsymbol{v},\ d\boldsymbol{x}) = \int_c v\cos\theta\, ds$$

となる．これが線積分の図形での意味である．

とくに，$\boldsymbol{v}$ が物理学での力の場であれば，I は線 c に沿っての仕事の総和である．

$\boldsymbol{v}$ が流体の流れの速度の場のときは，
$$\int_c (bdx-ady)$$
が c を通って流れる瞬間流出率となる．

つぎに，線 c が閉曲線，つまり $\boldsymbol{x}(t_1)=\boldsymbol{x}(t_2)$ で，c が1つの領域 D を囲んでいるとき

$$\iint_D \left(\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial y}\right)dxdy = \int_c (adx+bdy) \qquad (1)$$

が成り立つ．これがグリーンの定理である．ここで，c のまわり向きは，D の内部を左手に見てまわるまわり向きとする．

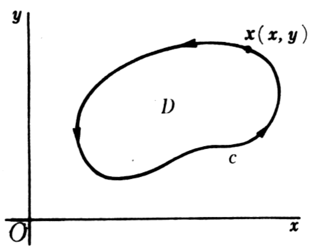


図 3

グリーン
(G. Green 1793-1841)

1次微分式 ω が x, y の C^2 級の関数 $z=f(x, y)$ の全微分 dz のとき，つまり，

$$\omega=adx+bdy \text{ で，} a=\frac{\partial z}{\partial x},\quad b=\frac{\partial z}{\partial y}$$

C^2 級…2階の偏導関数が連続

のときは，(1) の左辺は 0 となって，

$$\int_c \omega = 0$$

そこで，点Aから点Bへいたる2つの線 c_1, c_2 を考え，c_1 と c_2 の逆の道 c_2^{-1} でできる閉曲線を c と見ると，

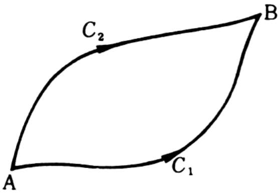


図 4

$$\int_{c_1}\omega + \int_{c_2^{-1}}\omega = 0,\ \text{だから，}\ \int_{c_1}\omega = \int_{c_2}\omega$$

したがって，$\omega=dz$ のときは，AからBへいたる線に沿っての ω の線積分の値は，両端A, Bだけできまり，途中の道のとり方には関係しない．

このことは，直接
$$\int dz = [z]_A^B = z_B - z_A$$
からもわかる．（z_A, z_B は，$z=f(x, y)$ の A, B での値）

$\omega=dz$ の場合は，

$$v=(a,b)=\left(\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

で，これは z をポテンシャルにもつベクトル場といわれている．

このような，昔からよく知られたことが，外積，外微分という算法によって簡潔に表わされる．まず，外積から述べよう．

2．外　　積

3次元空間で，ベクトルの外積(ベクトル積)というものが大変有用であることは，よく知られている．そこで使われているような算法をもっと広く利用するのが外積算法（外積代数）で，ここでは，変数 $x, y, \cdots$ の微分 $dx, dy, \cdots$ についての外積 $dx\wedge dy, \cdots$ を考える．はじめに，変数が2つ x, y の場合を考える．ここで基本となることは，

$$dx\wedge dx=0,\quad dy\wedge dy=0,\quad dx\wedge dy=-dy\wedge dx$$

で，それ以外はふつうの計算法に従うものとする．したがって，たとえば，

$$\begin{aligned}&(pdx+qdy)\wedge(rdx+sdy)\\&=pdx\wedge(rdx+sdy)+qdy\wedge(rdx+sdy)\\&=prdx\wedge dx+psdx\wedge dy+qrdy\wedge dx+qsdy\wedge dy\\&=psdx\wedge dy-qrdx\wedge dy\end{aligned}$$

となって，

$$(pdx+qdy)\wedge(rdx+sdy)=(ps-qr)dx\wedge dy \tag{2}$$

ここで，$ps-qr=\begin{vmatrix}p & q\\ r & s\end{vmatrix}$ となっている．

また，$\omega_1=pdx+qdy$, $\omega_2=rdx+sdy$ とおくと，(2)から，

$$\omega_1\wedge\omega_1=0,\quad \omega_2\wedge\omega_2=0,\quad \omega_1\wedge\omega_2=-\omega_2\wedge\omega_1$$

であることもわかる．

この算法は，次の重積分における変数変換の定理に応用される．

$x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$ によって点 (u,v) を点 (x,y) へ写像するとき，領域 K が領域 D へ1対1に写されるとし，

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}>0$$

とすると，

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_K f(\varphi,\psi)Jdudv \tag{3}$$

この場合，

$$dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv,\quad dy=\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv \tag{4}$$

だから，これに(2)を適用すると，

$$dx\wedge dy=Jdu\wedge dv$$

J は写像による微小面積の拡大率

したがって，(3)の両辺での $dxdy$, $dudv$ をそれぞれ $dx\wedge dy$, $du\wedge dv$ として考えれば，形式的な計算によって左辺から右辺が導かれることになる．極言すれば，(3)の形を知らなくても直接に(4)から計算できることになる．

例 1.　直角座標 (x, y) での2重積分を極座標 (r, θ) で書き直すときは，

$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ から，

$$dx=dr\cos\theta-r\sin\theta\, d\theta,\qquad dy=dr\sin\theta+r\cos\theta\, d\theta$$

となって，

$$dx\wedge dy=r\cos^2\theta\, dr\wedge d\theta-r\sin^2\theta\, d\theta\wedge dr=rdr\wedge d\theta$$

一般に，
$d(uv)=duv+udv$

例 2.　$x^2=uy$，$y^2=vx$ のときは，$u=x^2y^{-1}$，$v=x^{-1}y^2$

$$du\wedge dv=(2xy^{-1}dx-x^2y^{-2}dy)\wedge(-x^{-2}y^2dx+2x^{-1}ydy)=3dx\wedge dy$$

したがって，　$dx\wedge dy=\dfrac{1}{3}du\wedge dv$

このことから，第1象限で，4つの放物線

$x^2=ay$，$x^2=by$，$y^2=cx$，$y^2=dx$

$(0<a<b,\ 0<c<d)$

で囲まれる部分の面積が，

$$S=\iint dxdy=\iint\frac{1}{3}dudv=\frac{1}{3}dudv$$

$$=\frac{1}{3}(b-a)(d-c)$$

と簡単に計算できる．

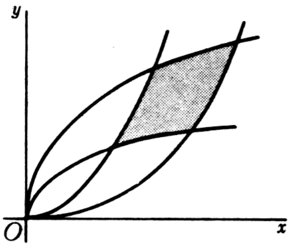


図 5

Q．大変きれいに行くようですが，$f(x, y)dx\wedge dy$ というような式から，直ちに $\int_D f(x, y)dxdy$ へ移るところが，ちょっとわかりません．

Q…question
A…answer

A．それは，$f(x, y)dx\wedge dy$ という式と，領域 D があると，これについて積分(数値)を対応させて考えるのです．

Q．$dx\wedge dy=-dy\wedge dx$ からは，$\iint_D f(x, y)dxdy=-\iint_D f(x, y)dydx$ となりますが，積分順序の変更ということでは，

$$\iint_D f(x, y)dxdy=\int\left(\int f(x, y)dy\right)dx$$

$$=\int\left(\int f(x, y)dx\right)dy=\iint_D f(x, y)dy\, dx$$

というように習っています．このことと矛盾しませんか．

A．それは，$f(x, y)dx\wedge dy$ から積分へ移るとき，変数 x, y の順序をはじめから指定しておいて考えるのです．だから，積分の形にしてしまってからの積分順序の変更とは無関係です．x, y の順序をきめておくというのは，いわば xy 平面の上での‘まわり向き’を指定しておくことで，これが方向づけ (orientation) といわれるものです．このこともあとからお話しします．

Q．x, y の順が逆なら，$dx\wedge dy$ でも $-dy\wedge dx$ として考えるのですね．そうすると，

$$f(x, y)dx\wedge dy\ \text{に対して，}\ -\iint_D f(x, y)dydx$$

となるわけですね．

A．そうです．もとになる式 $f(x, y)dx\wedge dy$ は同じでも，xy 平面の方の方向づけが違えば，積分の値も符号が変わるのです．

これまでは，変数が2つの場合について考えてきたが，変数の数が増えても

外積は同じように考えられる．たとえば，３つの変数 x, y, z についても，

$$dx\wedge dx=0, \quad dx\wedge dy=-dy\wedge dx, \quad dx\wedge dz=-dz\wedge dx$$

などは同じことであるが，その上，

$$(dx\wedge dy)\wedge dz=dx\wedge(dy\wedge dz)$$

という計算法則もつけ加えて，これを $dx\wedge dy\wedge dz$ とかくことにする．そうすると，

$$dx\wedge dy\wedge dz=dy\wedge dz\wedge dx=dz\wedge dx\wedge dy$$

であることがわかる．また，

$$\omega_1=p_1dx+q_1dy+r_1dz \qquad \varDelta=\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}$$
$$\omega_2=p_2dx+q_2dy+r_2dz$$
$$\omega_3=p_3dx+q_3dy+r_3dz$$

また，
$dz\wedge dy\wedge dx$
$=-dx\wedge dy\wedge dz$
一般に２つの項を入れかえると符号が変わる．

とすると，

$$\omega_1\wedge\omega_2\wedge\omega_3=\varDelta dx\wedge dy\wedge dz$$

であることもわかる．

Q．これまでも感じていたことですが，外積算法というのは，行列式と関連が深いのですね．ところで，こうした計算法が便利なことはよくわかりましたが，この計算の体系に矛盾がないというようなことは，どうしてわかるのでしょうか．

A．それは大切な点です．ここでは，微分の外積を考えてきたのですが，もっと広く考えた外積代数について，そうした基礎のことを次回にくわしくお話しします．

3. 外　微　分

これまでにも考えてきた $f(x, y)dx\wedge dy$ や，

微分形式
(differential form)

$$a(x, y, z)dy\wedge dz+b(x, y, z)dz\wedge dx+c(x, y, z)dx\wedge dy$$

のような式を２階の外微分形式（または単に微分形式）という．３変数 x, y, z については，

$$a(x, y, z)dx\wedge dy\wedge dz$$

が３階の微分形式である．

つぎに，微分形式の外微分という算法を定義しよう．まず，１次微分式

外微分
(exterior differential)

$$\omega=adx+bdy \ (a, b \text{ は } x, y \text{ の関数})$$

について，その外微分 $d\omega$ を，

この定義は変数 x, y のとり方に無関係である．（詳細は，後に述べる）

$$d\omega=da\wedge dx+db\wedge dy$$

によって定義する．このとき，

$$da=\frac{\partial a}{\partial x}dx+\frac{\partial a}{\partial y}dy, \quad db=\frac{\partial b}{\partial x}dx+\frac{\partial b}{\partial y}dy$$

だから，これを $d\omega$ の式に代入して計算すると，

$$d\omega=\left(\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial y}\right)dx\wedge dy \tag{5}$$

この記号を使えば 5 ページのグリーンの公式 (1) は，次のように書ける．

$$\iint_D d\omega = \int_c \omega \tag{6}$$

また，ω が全微分の場合を考えると，(5) によって，

$$\omega = dz \text{ ならば，} d\omega = 0 \tag{7}$$

となる．それは，この場合，

$$a = \frac{\partial z}{\partial x},\ b = \frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{したがって，} \quad \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} = 0$$

$z = f(x, y)$ が C^2 級のときは，
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

だからである．そこで，その逆

$$d\omega = 0 \text{ ならば，} \omega = dz \text{ となる } z = \varphi(x, y) \text{ が存在する} \tag{8}$$

ということは，成り立つであろうか．これは

$$\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} = 0 \text{ ならば，} \quad a = \frac{\partial z}{\partial x},\ b = \frac{\partial z}{\partial y} \text{ となる } z \text{ が存在する}$$

証明は微積分の本を参照

ということで，次のような意味で，

$$\text{局所的に成り立つ} \tag{9}$$

のである．それは，たとえば，

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \tag{10}$$

についていえば，計算によってわかるように，$d\omega = 0$ で，この場合実際に，

$$\omega = d\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right), \quad \text{つまり } z = \tan^{-1}\frac{y}{x} \tag{11}$$

$\omega = d\left(-\tan^{-1}\frac{x}{y}\right)$ ともなる．

となっている．ここで，(10)の ω は，$(x, y) \neq (0, 0)$ である限り意味をもっているが，(11)の z は $x > 0$, $x < 0$ で別々に定義された連続関数で，$x = 0$ ではつながっていない．つまり，ω の定義域全体にわたって $\omega = dz$ となる z がきまるとは限らない．

局所(小局)と全体(大局)とのちがい．

Q. この場合，ω の定義域 $(x, y) \neq (0, 0)$ の全体で定義された $z = \varphi(x, y)$ というものは本当にないのですか．

A. それは次のようなことからわかります．もし，そのような z があるとすれば，円 $x^2 + y^2 = 1$ を正の向きに1周する線 $c: x = \cos t$, $y = \sin t$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ について，

$$\int_c \omega = \int dz = [z]_{t=0}^{t=2\pi} = 0$$

ところが，実際には，計算によると，

$$\int_c \omega = \int_c (xdy - ydx) = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

となって矛盾を生じます．

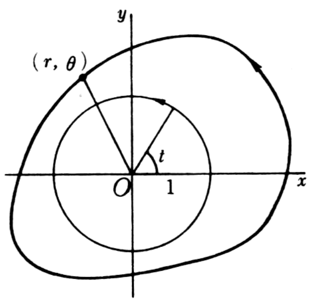


図 6

Q. なんだか(10)の式のからくりが見えてきました．円 c の上でなくても，極座標 (r, θ) を考えれば，(11)から $\omega = d\theta$ となっていますね．そこで $z = \theta$ としたいが，点 (x, y) が原点のまわりを1まわりすると 2π だけ増えてくるので，同じ θ では間に合わないというわけですね．(10)の形がもっともらしくて，それにだまされていました．つまらないことではないのですか．

A. いやいや，そうではありません．これが大変大切な一般論へつながってくるのです．

3次元の空間で，ベクトル場 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(x, y, z)$ の成分を，

$$(a, b, c)=(a(x, y, z),\ b(x, y, z),\ c(x, y, z))$$

とするとき，これについて次の公式がよく知られている．

$$\iint_S\left(\left(\frac{\partial c}{\partial y}-\frac{\partial b}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial a}{\partial z}-\frac{\partial c}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial y}\right)dxdy\right) \tag{12}$$
$$=\int_c(adx+bdy+cdz)$$

ここで，S は空間で閉曲線 c を周にもつ曲面．（ストークスの定理）

ストークス
(G. G. Stokes
1819-1903)



ガウス
(C.F. Gauss
1777-1855)

$$\iiint_D\left(\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial y}+\frac{\partial c}{\partial z}\right)dxdydz=\iint_S(adydz+bdzdx+cdxdy) \tag{13}$$

ここで，D は閉曲面 S で囲まれた空間の領域．（ガウスの定理）

(12)の右辺は空間曲線に沿っての線積分であり，(12)の左辺，(13)の右辺は面積分といわれるものである．（これらについての詳細は，後に詳しく述べる）

公式(12)においては，$\omega=adx+bdy+cdz$ とおいて，$d\omega$ を

$$d\omega=da\wedge dx+db\wedge dy+dc\wedge dz$$

によって定義すると，

$$\iint_S d\omega=\int_c\omega \tag{14}$$

と書けることは，(6) と同様である．(13) では，

$$\omega=ady\wedge dz+bdz\wedge dx+cdx\wedge dy$$

とおいて，

$$d\omega=da\wedge dy\wedge dz+db\wedge dz\wedge dx+dc\wedge dx\wedge dy$$

によって $d\omega$ を定義すると，

$$da=\frac{\partial a}{\partial x}dx+\frac{\partial a}{\partial y}dy+\frac{\partial a}{\partial z}dz,\quad db=\frac{\partial b}{\partial x}dx+\frac{\partial b}{\partial y}dy+\frac{\partial b}{\partial z}dz,$$
$$dc=\frac{\partial c}{\partial x}dx+\frac{\partial c}{\partial y}dy+\frac{\partial c}{\partial z}dz$$

だから，外積の計算法によって，

$$d\omega=\left(\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial y}+\frac{\partial c}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz$$

そこで，(13)は次のようになる．

$$\iiint_D d\omega=\iint_S\omega \tag{15}$$

(12)で c は S の周，(13)では S は D の表面である．そこで一般に，図形 D の境界（へり）を ∂D とかき，積分の $\iiint, \iint$ も単に $\int$ とかくことにすると，(6)(14)(15)がすべて，

$$\int_D d\omega=\int_{\partial D}\omega \tag{16}$$

と，極めて統一された形になる．これを一般に考えたものを，広い意味でのストークスの定理という．

(7)によると，$d(dz)=0$ であるが，

$$\omega=a(x, y, z)dx+b(x, y, z)dy+c(x, y, z)dz$$

についても，$\Omega=d\omega$ とおくと，$d\Omega=0$ となることが計算によって確かめられる．つまり，

$$d(d\omega)=0$$

また，逆に，2階の微分形式 Ω について，

$d\Omega=0$ ならば，$\Omega=d\omega$ となる1次微分式 ω が局所的に存在する

こともわかっている．

Q．ストークスの定理(16)では，左辺の $d\omega$ の d が，右辺では D の所へ ∂D として移った形になっていますね．これは覚えやすいな．このことから，D の境界を ∂D とかくのですか．

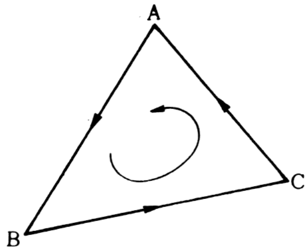


図 7

A．そうです．また，外微分では $d(d\omega)=0$ というように，2回微分をとると0になりますが，これに類似した

$\partial(\partial D)=0$，つまり，境界の境界は0

ということもいえるのです．

Q．それはどういうことでしょうか．

A．ここでは，ごく大体のことしかいえませんが，たとえば D がまわり向きを考えた三角形 ABC のとき，

$$\partial(\mathrm{ABC})=(\mathrm{BC})+(\mathrm{CA})+(\mathrm{AB})$$

$$\partial(\mathrm{BC})=(\mathrm{C})-(\mathrm{B}),\quad \partial(\mathrm{CA})=(\mathrm{A})-(\mathrm{C}),\quad \partial(\mathrm{AB})=(\mathrm{B})-(\mathrm{A})$$

というような形式的な計算をやると，$\partial(\partial(\mathrm{ABC}))=0$ となるのです．こうしたことは位相幾何のはじめに出てくることです．



Q．ストークスの定理や，$d(d\omega)=0$ というようなことが大分深いことだということがぼんやりとわかって来たように思います．しかし，グリーンの定理(1)でも，領域 D が複雑な形のときのことは，説明は聞いたことはありますが，厳密に証明してもらったことはありませんし，(12)，(13)に至っては極めて直観的に習いました．あそこは，他のところとちがって，物理の時間などでの数学の扱いとあまり違っていなかったように覚えています．きちんとした証明はできないのですか．

A．実は，1930年代の終りまでは，世界中の誰れもがこの点では割り切れないもやもやした思いをしていたのです．それをきちんとやったのが，ブルバキの人達です．実は，微分 dx, dy, dz というようなものも，この人達によってはじめて明快な概念となったのです．こうしたことについても基本的なことをお話ししておこうというのが，この講義の目的の1つです．

ブルバキ
(N. Bourbaki)

Q．外積や外微分は，一般化されたストークスの定理にだけ有効なのですか．

A．いや，そうではありません．もっと広い応用をもつものです．その一端を次にお話ししましょう．

4．変換群と関数値の変化

はじめに，3次元のユークリッド空間で，1点を固定した表向きの回転を考え，その全体のつくる群 SO(3) について調べよう．この回転は，固定点を原点にとって直角座標で考えれば，正規の直交行列 $P=(p_{ij})$ による変換

SO…特殊直交群
(special orthogonal group)
正規…det $P=1$

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} p_{ij} x_j \qquad (i=1, 2, 3)$$

によって，点 (x_1, x_2, x_3) を点 (x_1', x_2', x_3') へ移すことである．

いま，この回転で定まった点 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$ が点 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)$ へ移ったとすると，

$$x_i = \sum_{j=1}^{3} p_{ij} a_j \qquad (i=1, 2, 3) \tag{17}$$

そこで，点 $\boldsymbol{a}$ を固定して $P=(p_{ij})$ を連続的に変えることによって起こる運動を考える．この運動の径数（パラメーター）の個数は1, 2, 3のどれかである．また p_{ij} はこれらの径数について何回でも微分できるとしておく．そうすると，x_i はこれらの径数の関数で，

一般の3次の直交行列は，本質的には3個の径数をふくんでいる．$\left(n \text{ 次では } \frac{n(n-1)}{2} \text{ 個}\right)$

$$dx_i = \sum_{j} a_j dp_{ij} \tag{18}$$

$P=(p_{ij})$ が直交行列だから，(17)によって，

$$a_j = \sum_{k} p_{kj} x_k$$

これを(18)に代入して，$\alpha_{ki} = \sum_{j} p_{kj} dp_{ij}$ とおくと，

$$dx_i = \sum_{k} x_k \alpha_{ki} \tag{19}$$

ところが，$\sum_{k} p_{ij} p_{kj} = \delta_{ik}$ だから，$\sum_{j} dp_{ij} \cdot p_{kj} + \sum_{j} dp_{kj} \cdot p_{ij} = 0$ となって，

$$\alpha_{ik} + \alpha_{ki} = 0 \quad \text{したがって，} \alpha_{ik} = -\alpha_{ki} \quad \text{とくに} \quad \alpha_{ii} = 0$$

そこで，

$$\omega_1 = \alpha_{23} = -\alpha_{32}, \quad \omega_2 = \alpha_{31} = -\alpha_{13}, \quad \omega_3 = \alpha_{12} = -\alpha_{21}$$

とおくと(19)は次のようにかける．

$$dx_1 = x_3\omega_2 - x_2\omega_3, \quad dx_2 = x_1\omega_3 - x_3\omega_1, \quad dx_3 = x_2\omega_1 - x_1\omega_2 \tag{20}$$

これが(17)で表わされる運動での点 $\boldsymbol{x}$ の微小変化 $d\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x}$ と $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ で表わしたもので，基本的な式である．ここで，$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ は (p_{ij}) だけできまる式で，x_1, x_2, x_3 はふくんでいない．

とくに，1つの径数 t による運動では，t を時刻と考え，$\omega_i/dt = c_i$ $(i=1, 2, 3)$，$\boldsymbol{c}=(c_1, c_2, c_3)$ とおくと，(20)から，

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}]$$

となる．$\boldsymbol{c} \neq 0$ のときは，これはこの運動での各点の速度ベクトルの場は，点Oをとおる $\boldsymbol{c}$ 方向の軸のまわりの角速度 $|\boldsymbol{c}|$ の回転の速度ベクトル場となっていることを示している．

Q.　ここまでは，力学で習ったことがあります．

A.　これからの話が大切ですよ．よく聞いて下さい．

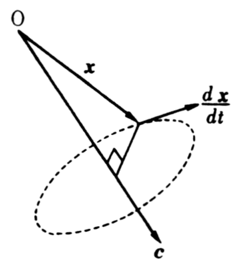


図 8

ベクトル $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}$ の外積 $[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}]$ は $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}$ に垂直でその大きさは $|\boldsymbol{c}| \cdot |\boldsymbol{x}| \sin\theta$ （θ は $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}$ のなす角）

いま，(x_1, x_2, x_3) の関数 $F=F(x_1, x_2, x_3)$ があるとき，(17)によって x_1, x_2, x_3 を運動の径数とみると，F もその関数となる．このとき，

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial F}{\partial x_3} dx_3$$

(20)をこれに代入して $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ について整理し，さらに，

$$X_1=x_2\frac{\partial}{\partial x_3}-x_3\frac{\partial}{\partial x_2},\quad X_2=x_3\frac{\partial}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial}{\partial x_3},\quad X_3=x_1\frac{\partial}{\partial x_2}-x_2\frac{\partial}{\partial x_1} \tag{21}$$

という微分作用素を使うと，結局次のようになる．

$$dF=X_1F\cdot\omega_1+X_2F\cdot\omega_2+X_3F\cdot\omega_3 \tag{22}$$

x_3 軸のまわりの回転では，$X_1=0$, $X_2=0$

これは，F の微小変化を3つの微小変化へ分解しているわけである．

つぎに，(20)の第3式の両辺を外微分すると，$d(dx_3)=0$ だから，

$$dx_2\wedge\omega_1+x_2d\omega_1-dx_1\wedge\omega_2-x_1d\omega_2=0$$

一般に，m が関数，ω が1次微分式だと，$d(m\omega)=dm\wedge\omega+md\omega$ それは，$\omega=\sum_i a_idx_i$ とおくと，$d(m\omega)=\sum_i d(ma_i)\wedge dx_i$ による．

(20)の第1，第2の式を代入して，

$$x_2(d\omega_1-\omega_2\wedge\omega_3)-x_1(d\omega_2-\omega_3\wedge\omega_1)=0$$

x_2, x_1 は任意で，$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ は x_1, x_2, x_3 と無関係だから，

$$d\omega_1=\omega_2\wedge\omega_3,\quad d\omega_2=\omega_3\wedge\omega_1 \tag{23}$$

同様にして，

$$d\omega_3=\omega_1\wedge\omega_2$$

また，一般に2つの1次微分作用素 X, Y について，

$$[X, Y]=XY-YX$$

によって第3の1次微分作用素を定めることができる．(21)の X_1, X_2, X_3 については，

$$[X_2, X_3]=-X_1,\quad [X_3, X_1]=-X_2,\quad [X_1, X_2]=-X_3 \tag{24}$$

であることが，直接の計算によってわかる．

Q. 随分いろいろなことが出てきましたね．(23)と(24)も何か関係がありそうですね．こうしたことがどんな役に立つのでしょうか．

A. それは一口にはいえません．だんだんと分ってもらうより仕方がないでしょう．

Q. これは，回転群だからこんなにいろいろきれいに出るのでしょうか．

A. いや，そうではありません．こうしたことは，いくつかの有限個の径数をもった連続群では，いつでも同じようなことがいえるのです．これはリーという人がやった研究をエリー・カルタンらが深く進めたものです．つぎに，ユークリッド平面の場合の例を，もう1つ示しておきましょう．

リー (M.S. Lie 1842-1899)

ユークリッド平面の上で，表向きの移動は，直角座標を使って，

$$x_1'=x_1\cos\theta-x_2\sin\theta+u_1,\quad x_2'=x_1\sin\theta+x_2\cos\theta+u_2$$

平面上の移動は3つの径数 θ, u_1, u_2 できまる．

によって点 (x_1, x_2) を点 (x_1', x_2') へ移すこととして表わされる．

いま，定点 (a_1, a_2) にこの移動をほどこした点を (x_1, x_2) とすると，

$$x_1=a_1\cos\theta-a_2\sin\theta+u_1,\quad x_2=a_1\sin\theta+a_2\cos\theta+u_2 \tag{25}$$

u_1, u_2, θ を径数とする運動を考えると，

$$dx_1=(-a_1\sin\theta-a_2\cos\theta)d\theta+du_1,$$
$$dx_2=(a_1\cos\theta-a_2\sin\theta)d\theta+du_2$$

(25)を参照して，

$$dx_1 = -x_2 d\theta + (du_1 + u_2 d\theta),\quad dx_2 = x_1 d\theta + (du_2 - u_1 d\theta)$$

そこで,

$$\omega_1 = du_1 + u_2 d\theta,\quad \omega_2 = du_2 - u_1 d\theta,\quad \omega_3 = d\theta$$

とおくと,

$$dx_1 = \omega_1 - x_2\omega_3,\quad dx_2 = \omega_2 + x_1\omega_3$$

さらに,

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1},\quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2},\quad X_3 = x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_1}$$

とおくと,$F = F(x_1, x_2)$ について,

$$dF = X_1F\cdot\omega_1 + X_2F\cdot\omega_2 + X_3F\cdot\omega_3$$

平行移動では,$X_3=0$ 原点の まわり の 回転 では,$X_1=0$,$X_2=0$

また, $$d\omega_1 = \omega_2\wedge\omega_3,\quad d\omega_2 = -\omega_1\wedge\omega_3,\quad d\omega_3 = 0$$

$$[X_2, X_3] = -X_1,\quad [X_1, X_3] = X_2,\quad [X_1, X_2] = 0$$

となって,SO (3) の場合に類似の式が得られる.

5. 積分不変式,力学系,変分法

いま,$Y_r = Y_r(y_1, \cdots, y_k)$ $(r=1,2,\cdots,k)$ が C^1 級の関数とし,微分方程式

$$\frac{dy_r}{dt} = Y_r(y_1, \cdots, y_k)\qquad (r=1,2,\cdots,k)\tag{26}$$

を,$t=t_0$ のとき $y_r = a_r (r=1,2,\cdots,k)$ という条件で解いて得られる解を

$$y_r = \varphi_r(t, a_1, \cdots, a_k)\qquad (r=1,2,\cdots,k)\tag{27}$$

とすると,定まった t に対しては,$(a_1, \cdots, a_k)\to(y_1, \cdots, y_k)$ によって R^k から R^k への写像 φ_t が得られる.この写像については,

一般的な流れ (flow)

$$\varphi_s\circ\varphi_t = \varphi_{s+t}$$

となることが示される.

この特別な場合として,$H = H(x, p) = H(x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n)$ について,

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}\qquad (i=1,2,\cdots,n)\tag{28}$$

これが力学系 (dynamical system)

で与えられる微分方程式が考えられるが,これはハミルトンの微分方程式と呼ばれ,物理学では極めて重要なものである.この微分方程式の解については,

ハミルトン (W.R. Hamilton 1805-1865)

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i\tag{29}$$

という1次微分式が基本的で,(28)について考えた(27)の写像 φ_t に対しては,

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i\wedge dx_i$$

が不変式となることがわかっている.このことからまた,n 個の $d\omega$ の外積

$$(d\omega)^n = (d\omega)\wedge(d\omega)\wedge\cdots\wedge(d\omega)$$
$$= (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} n!\, dp_1\wedge\cdots\wedge dp_n\wedge dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$$

流れによる体積の不変性 (リュービルの定理)

も不変式であることが導かれる.

さらにまた,

$$\Omega=\sum_{i=1}^{n}p_i dx_i-Hdt \tag{30}$$

とおくと，その外微分については，

$$d\Omega=\sum_{i=1}^{n}\left(dp_i+\frac{\partial H}{\partial x_i}dt\right)\wedge\left(dx_i-\frac{\partial H}{\partial p_i}dt\right)$$

となって，これをもとにして(28)の解の性質を研究することができる．

この考えにならって，変分問題の研究を進めることができる．それは，与えられた $F=F(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)$ （$y_1,\cdots,y_n$ について1次同次）に対して，ある条件の下で，

一般に $f(u_1,\cdots,u_n)$ が1次同次とは，$f(tu_1,\cdots,tu_n)=tf(u_1,\cdots,u_n)$ のことをいう．たとえば，$\dfrac{u_1{}^2+\cdots+u_n{}^2}{u_1+\cdots+u_n}$

$$J[x_1,\cdots,x_n]=\int_{t_1}^{t_2}F\left(x_1,\cdots,x_n,\frac{dx_1}{dt},\cdots,\frac{dx_n}{dt}\right)dt$$

を極大極小にする線（極値曲線）$x_i=x_i(t)$ （$i=1,\cdots,n$）を求めることを問題とするのであるが，この場合，

$$\omega=\sum_{i=1}^{n}p_i dx_i \qquad \left(ここに\ \ p_i=\frac{\partial F}{\partial y_i}\right)$$

が基本的な役割をはたすのである．

Q. 大分，大風呂敷をひろげましたね．どこまでお話しして下さるのですか．

A. それは，どこまでかわかりませんが，ぼつぼつ順を追ってお話ししましょう．次回は，準備としてベクトル空間のことであとから必要なことをお話しします．

第1章　テンソル積と外積

微分形式の取扱いでは，外積算法が大切である．この算法は，広くベクトル空間の上で考えられるものである．また，1次微分式とならんで，1次微分作用素(演算子)が重要な役割りをするのであるが，これらは，1つのベクトル空間とその双対ベクトル空間の関係としてとらえられる．このように，微分形式の理論において基礎となるのは，有限次元のベクトル空間と，そこでのある種の算法である．今回は，これを概説することにしよう．

1. ベクトル空間

幾何学や物理学ででてくる矢線ベクトルや，線形代数ででてくる数ベクトルを一般化して一般のベクトルを次のように定義することは，よく知られている．

基礎となる数の範囲は実数として，これを $a, b, \cdots, k, l, \cdots, x, y, z$ などで表わす．いま，1つの集合 V があって，その元を $\alpha, \beta, \cdots, \xi, \eta, \zeta$ などで表わすこととし，それらの間に次のことが成り立つとき，V を実数体 R の上のベクトル空間といい，その元 $\alpha, \beta, \cdots$ をベクトルという．

(Ⅰ)　V の任意の2つの元を α, β とするとき，これによって V の1つの元が定まる．これを $\alpha+\beta$ とかくと，次の計算法則が成り立つ．

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha,\quad (\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$$

(Ⅱ)　V の任意の元 α と任意の実数 k に対して V の1つの元が定まる．これを $k\alpha$ (または αk) とかくと，次の計算法則が成り立つ．

$$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta,\quad (k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha,\quad (kl)\alpha=k(l\alpha),\quad 1\alpha=\alpha$$

$1\alpha=\alpha$ も公理！

(Ⅲ)　V の任意の2つの元 α, β に対して，$\alpha+\gamma=\beta$ となる V の元 γ が存在する．

これらの条件が成り立っていると，

　V の元 α に対して，$\alpha+\xi=\alpha$ となる ξ はただ1つ存在し，この ξ は V の任意の元に対して同一である

ことが示される．これをゼロベクトルといい0で表わす．そうすると，$0\alpha=0$ であることがわかる．また，$(-1)\alpha$ を $-\alpha$ とかいて，$\beta-\alpha=\beta+(-\alpha)$ によって $\beta-\alpha$ を定義すると，

実数のゼロ ⋮ $0\alpha=0$ ⋮ ゼロベクトル

$$\alpha+(-\alpha)=0,\quad (\beta-\alpha)+\alpha=\alpha$$

などが導かれる．

このようにして，ベクトル空間 V では，ベクトルの 和, 実数倍, 差 については，ふつうの文字式の場合と全く同じように計算ができることがわかる．

Q．このようなことは，何度も聞きました．聞き飽いたような気がしますが．

A．まあ，そういわないで，もう少し辛抱して下さい．ここの話に限らず，筋道を立てて話をしていくときは，やはりはじめのうちはこうしたことになる

Q．学生の発言
A．教師の応答

のです．なるべく手っとり早く先へいくようにしましょう．

V の元 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ に対し，

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r=0, \qquad (k_1, \cdots, k_r)\neq(0, \cdots, 0)$$

となる実数 $k_1, \cdots, k_r$ があるとき，$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ は1次従属であるといい，そうでないとき，1次独立という．

V の中で，

(i) 1次独立な元が n 個ある (ii) どの $n+1$ 個の元も1次従属である

というとき，V は n 次元であるという．この場合，1次独立な n 個の元を $\xi_1, \cdots, \xi_n$ とかくと，任意の元 α は

$$\alpha=a_1\xi_1+\cdots+a_n\xi_n$$

とかける．$\xi_1, \cdots, \xi_n$ を基底（または単に基）といい，$a_1, \cdots, a_n$ を成分という．このとき，

$$\xi_i'=\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\xi_j, \quad \det(p_{ij})\neq 0 \qquad (i, j=1, \cdots, n)$$

で定まる $\xi_1', \cdots, \xi_n'$ も基底である．

$\det(p_{ij})$ は，p_{ij} を第 i 行第 j 列の元とする行列式

n 次元のベクトル空間で，基底を定めたとき，α, β の成分がそれぞれ $(a_1, \cdots, a_n), (b_1, \cdots, b_n)$ であれば，

$$\alpha+\beta \text{ の成分は } (a_1+b_1, \cdots, a_n+b_n), \quad k\alpha \text{ の成分は } (ka_1, \cdots, ka_n)$$

Q．無限次元のベクトル空間の例としては，$[0, 1]$ を定義域とする連続関数全体というようなものがありましたね．今後，このような無限次元の場合も考えるのですか．

A．いや，この講義では，それは考えません．有限次元の場合だけです．

Q．それでしたら，はじめから数ベクトル $(a_1, \cdots, a_n)$ だけでよいわけですね．ベクトル空間の公理から出発する必要はなかったのではありませんか．

A．やはり，基のとり方に関係しないで話せるところは，その方が intrinsic でよいと思うのです．

intrinsic… 本質的，固有の

Q．それで徹底するのですか．

A．なかなかしんらつですね．先へいったら，そうばかりもいかないでしょうが，まあ，できるところまでそうしてみましょう．

実数体の上の2つのベクトル空間 V, W と，V の W の中への写像 φ があって，V の元を α, β とかくとき，

$$\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta), \quad \varphi(k\alpha)=k\varphi(\alpha)$$

となっているならば，φ を線形写像という．この場合，V が n 次元で，基底を $\xi_1, \cdots, \xi_n$，W が m 次元で基底を $\eta_1, \cdots, \eta_m$ とするとき，$\varphi(\xi_i)=\sum_j a_{ji}\eta_j$ とおくと，$\eta=\varphi(\xi)$ は ξ の成分 $(x_1, \cdots, x_n)$，η の成分 $(y_1, \cdots, y_m)$ を使うと，

$$y_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \qquad (i=1, \cdots, m)$$

と表わせる．ここで，W が1次元の場合を考えると，次のようになる．

n 次元のベクトル空間 V から実数全体 R の中への線形写像 φ を考える．これは，成分でいえば，

$$y=\sum_i a_ix_i=a_1x_1+\cdots+a_nx_n \tag{1.1}$$

で表わされるもの，つまり $x_1, \cdots, x_n$ の1次式である．こうした，V から R への線形写像の全体を考え，これを V^* とするとき，V^* の元 φ, ψ の和 $\varphi+\psi$，実数倍 $k\varphi$ を

$$(\varphi+\psi)(\xi)=\varphi(\xi)+\psi(\xi), \quad (k\varphi)(\xi)=k\varphi(\xi)$$

によって定義すると，V^* 自身ベクトル空間になる．これを V の双対ベクトル空間という．これは，$\varphi(\xi), \psi(\xi)$ を ξ の成分 $(x_1, \cdots, x_n)$ を使って表わしたものを，

双対(そうつい，そうたい)… dual

$$\varphi(\xi)=\sum a_i x_i, \quad \psi(\xi)=\sum b_i x_i$$

とするとき，$\varphi+\psi, k\varphi$ はそれぞれ

$$(\varphi+\psi)(\xi)=\sum (a_i+b_i)x_i, \quad (k\varphi)(\xi)=\sum (ka_i)x_i$$

で表わされる線形写像となっているわけである．そこでいま，

$$\varphi_1(\xi)=x_1, \cdots, \varphi_n(\xi)=x_n$$

で表わされる V^* の元を $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ とすると，(1.1) の φ は

$$\varphi=a_1\varphi_1+\cdots+a_n\varphi_n$$

と表わされる．この $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ を V の基 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ に対する V^* の双対基底という．また，一般に，$\varphi(\xi)$ のことを $\langle\xi, \varphi\rangle$ ともかく，この意味で，

双対基底

$$\langle\xi_i, \varphi_j\rangle=\delta_{ij}$$

となっている．

Q．双対ということは，どこからきているのですか．

A．それは，V^* の双対ベクトル空間，つまり $(V^*)^*$ を考えると，これは，V と本質的に同じものとみてよいということです．このことは，(1.1) からもわかるでしょう．正確にいえば，$\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ の双対基底 $\zeta_1, \cdots, \zeta_n$ を考えて，これらを V の基底 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ と対応させ，$(V^*)^*$ の元 $x_1\zeta_1+\cdots+x_n\zeta_n$ を V の元 $x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n$ と対応させると，これで $(V^*)^*$ と V がベクトル空間として同型になるのです．

ベクトル空間 V, V' の同型対応とは，1対1で，V の元の和，k 倍に，V' の元の和，k 倍の対応するもの．

Q．大分早いテンポで進んできましたね．大体，今まで聞いたことばかりですが，ぼつぼつ忘れているところが出てきます．

A．そういうところは，よく復習しておいて下さい．これから本論に入りますから，筋道はもう少し詳しくお話ししていきます．もっとも，すべて証明するというわけにはいきませんがね．

2．ベクトル空間のテンソル積

実数の上の2つのベクトル空間 V, W からテンソル積と呼ばれるベクトル空間 $V\otimes W$ を作ることを述べよう．それには，まず，V の任意の元 ξ と，W の任意の元 η との順序のついた組を (ξ, η) とかくことにして，すべての (ξ, η) で生成される実数体の上のベクトル空間を $V\circ W$ とする．つまり，$V\circ W$ は (ξ, η) に実数をかけたものを作り，その有限個の和 $\sum k(\xi, \eta)$ の全体で構成したベクトル空間である．

テンソル積 tensor product

つぎに，$V\circ W$ の中で，

$$(\xi_1+\xi_2, \eta)-(\xi_1, \eta)-(\xi_2, \eta), \quad (k\xi, \eta)-k(\xi, \eta) \tag{2.1}$$

$$(\xi, \eta_1+\eta_2)-(\xi, \eta_1)-(\xi, \eta_2), \quad (\xi, k\eta)-k(\xi, \eta) \tag{2.2}$$

この段階では，$(\xi_1+\xi_2, \eta)$，$(k\xi, \eta)$ は全く変形できない．

の形の元全体を考え，これらで生成されるベクトル空間を作って，これをSとする．このとき，

$$\begin{aligned}&(k_1\xi_1+k_2\xi_2,\eta)-k_1(\xi_1,\eta)-k_2(\xi_2,\eta)\\&=(k_1\xi_1+k_2\xi_2,\eta)-(k_1\xi_1,\eta)-(k_2\xi_2,\eta)\\&\quad+((k_1\xi_1,\eta)-k_1(\xi_1,\eta))+((k_2\xi_2,\eta)-k_2(\xi_2,\eta))\end{aligned}$$

となって，これは (2.1)(2.2) の形の項の和で，S に属する．同じように，

$$(\xi,l_1\eta_1+l_2\eta_2)-l_1(\xi,\eta_1)-l_2(\xi,\eta_2)$$

も S に属することがわかる．同じようにして一般に，

$$(\sum_i k_i\xi_i,\ \sum_j l_j\eta_j)-\sum_{i,j}k_il_j(\xi_i,\eta_j) \tag{2.3}$$

も S に属する．

そこで，ベクトル空間 $V\circ W$ をその部分ベクトル空間Sによって剰余類に分けてできるベクトル空間を $V\otimes W$ とかいて，V と W のテンソル積というのである．$V\circ W$ での $\sum k(\xi,\eta)$ に対応する $V\otimes W$ の元を $\sum k\xi\otimes\eta$ とかく．したがって，

平たくいえば，(2.1)，(2.2) のような項が出てきたら 0 とおくことである．

$$(k_1\xi_1+k_2\xi_2)\otimes\eta=k_1\xi_1\otimes\eta+k_2\xi_2\otimes\eta$$
$$\xi\otimes(l_1\eta_1+l_2\eta_2)=l_1\xi\otimes\eta_1+l_2\xi\otimes\eta_2$$

一般に (2.3) から，

$$(\sum_i k_i\xi_i)\otimes(\sum_j l_j\eta_j)=\sum_{i,j}k_il_j\xi_i\otimes\eta_j \tag{2.4}$$

Q．いろいろ質問があります．$V\circ W$ の元 $\sum k(\xi,\eta)$ では，$(\xi_1+\xi_2,\eta)$ というようなものは，何も変形できないのですね．

A．その通りです．$V\otimes W$ になって，はじめてそうしたことがやれるのです．

Q．$V\circ W$ を S で剰余類に分けるということを復習してみます．これは，整数全体を1つの整数で剰余類に分けるのと同じですね．まず，$\lambda,\mu\in V\circ W$ として，

$$\lambda-\mu\in S \rightleftarrows \lambda\sim\mu$$

として〜を定義しますと，これは同値律をみたしているので，$V\circ W$ がこれによって剰余類に分かれます．そして，

同値律
$\lambda\sim\lambda$
$\lambda\sim\mu\to\mu\sim\lambda$
$\lambda\sim\mu,\ \mu\sim\nu\to\lambda\sim\nu$

$$\lambda_1\sim\lambda_2,\ \mu_1\sim\mu_2\quad \text{ならば}\quad \lambda_1+\mu_1\sim\lambda_2+\mu_2,\quad k\lambda_1\sim k\lambda_2$$

となるので，このことから各剰余類の元についての和と実数倍が，類としての和や実数倍になります．これがまた，ベクトル空間の公理を満たしているのですね．

A．その通りです．

Q．ところで，$\otimes$ をはじめから (2.4) を満たす計算法といってしまえば，このようにもってまわったことを考えないでもよかったのではありませんか．

A．そうはいえません．こうした計算法が合理的であるということは，このような筋道をたどってわかることです．

Q．V,W が有限次元で，基底がそれぞれ $\xi_1,\cdots,\xi_n;\ \eta_1,\cdots,\eta_m$ であると，

$$\xi=\sum_i x_i\xi_i,\quad \eta=\sum_j y_j\eta_j \quad \text{のとき,}\quad \xi\otimes\eta=\sum_{i,j}x_iy_j\xi_i\otimes\eta_j$$

となって，mn 個の $\xi_i\otimes\eta_j$ が $V\otimes W$ の基底となるのですね．

A．その通りです．それに対して，$V\circ W$ は無限次元のベクトル空間です．

3つ以上のベクトル空間についても，同じようにテンソル積を考えることができる．

3つのベクトル空間 V, W, Z の場合でいえば，上と同じようにして $V\otimes W\otimes Z$ を考えると，

$$(\sum_i k_i\xi_i)\otimes(\sum_j l_j\eta_j)\otimes(\sum_k m_k\zeta_k)=\sum_{i,j,k} k_il_jm_k\xi_i\otimes\eta_j\otimes\zeta_k$$

という計算法が基本となる．

また，$V\otimes W\otimes Z$ は，$(V\otimes W)\otimes Z$, $V\otimes(W\otimes Z)$ とベクトル空間としても同型（$\xi\otimes\eta\otimes\zeta$ が $(\xi\otimes\eta)\otimes\zeta$, $\xi\otimes(\eta\otimes\zeta)$ に対応）である．これらは今後同一のものと考えていくことにする．こうしたことの詳細は，ここでは省略する．

3．外　　　　積

ベクトル空間 V での外積は，同じ V のテンソル積 $V\otimes V$, $V\otimes V\otimes V$ などをもとにして次のように考えていく．ここで，$V\otimes V$ を V^2, $V\otimes V\otimes V$ を V^3 のようにかく．

外積
exterior product

まず，一般に，ことなる r 個のものがあるとき，その置換の全体を考えると，これに偶置換と奇置換がある．たとえば，2つのもの a, b について，

偶置換　$(a,b)\to(a,b)$　　　奇置換　$(a,b)\to(b,a)$

また，3つのもの a,b,c については，

偶置換　$(a,b,c)\to(a,b,c)$，$(a,b,c)\to(b,c,a)$，$(a,b,c)\to(c,a,b)$

奇置換　$(a,b,c)\to(a,c,b)$，$(a,b,c)\to(c,b,a)$，$(a,b,c)\to(b,a,c)$

となっている．これらは，a, b が数の場合については，

$a-b$ の符号を変えないものが偶置換，符号を変えるものが奇置換

a,b,c の場合についていえば，

$(a-b)(a-c)(b-c)$ の符号を変えないものが偶置換，変えるものが奇置換

といえる．

一般に，置換を σ で表わし，σ の符号というものを，偶置換のときは正，奇置換のときは負ときめて，$\varepsilon=\varepsilon(\sigma)$ を

σ が偶置換のとき　$\varepsilon(\sigma)=1$,　　σ が奇置換のとき　$\varepsilon(\sigma)=-1$

ときめておく．そして，一般に r 個のものの置換 σ の全体について

$$A_r=\frac{1}{r!}\sum\varepsilon(\sigma)\sigma$$

という算法を考える．これを交代化 (alternation) という．

A_r に対して，
$S_r=\dfrac{1}{r!}\sum\sigma$
という操作は対称化といわれる．

この算法を，V^2 の元 $\alpha\otimes\beta$ に施こすと，

$$A_2(\alpha\otimes\beta)=\frac{1}{2}(\alpha\otimes\beta-\beta\otimes\alpha)$$

V^3 の元 $\alpha\otimes\beta\otimes\gamma$ に施こすと，

$$A_3(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma)=\frac{1}{6}(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma+\beta\otimes\gamma\otimes\alpha+\gamma\otimes\alpha\otimes\beta$$
$$-\alpha\otimes\gamma\otimes\beta-\gamma\otimes\beta\otimes\alpha-\beta\otimes\alpha\otimes\gamma)$$

さらに，A_r は線形作用素であるとする．したがって，たとえば，

$$A_2(\sum k\alpha\otimes\beta)=\sum kA_2(\alpha\otimes\beta)$$

このことから，

$$A_2\left(\frac{1}{2}(\alpha\otimes\beta-\beta\otimes\alpha)\right)=\frac{1}{2}(\alpha\otimes\beta-\beta\otimes\alpha)$$

$A_2(\alpha\otimes\beta+\beta\otimes\alpha)=0$

つまり，$A_2(A_2(\alpha\otimes\beta))=A_2(\alpha\otimes\beta)$ といえる．これは，一般に A_r についてもいえることである．

そこで，V^2 の元 $\sum k\alpha\otimes\beta$ に対して，$\sum k\alpha\wedge\beta$ を

$$\sum k\alpha\wedge\beta=A_2(\sum k\alpha\otimes\beta)$$

によって定義する．また，V^3 の元 $\sum k\alpha\otimes\beta\otimes\gamma$ については，$\sum k\alpha\wedge\beta\wedge\gamma$ を

$$\sum k\alpha\wedge\beta\wedge\gamma=A_3(\sum k\alpha\otimes\beta\otimes\gamma)$$

によって定義する．一般の場合も同じようである．このときの $\alpha\wedge\beta$，を α,β の外積，$\alpha\wedge\beta\wedge\gamma$ を α,β,γ の外積という．

一般に，V^r の元全体に A_r を施こしてできるものの全体を $\wedge^r(V)$ とかくことにする．A_r が線形作用素だから，$\wedge^r(V)$ は V^r の部分ベクトル空間になっている．$\wedge^2(V)$ の中での外積算法 $\wedge$ については，次の計算法則が成り立つ．

$\wedge^r(V)$…V の上の r 階の外積空間

$$\alpha\wedge\beta=-\beta\wedge\alpha \quad \text{とくに} \quad \alpha\wedge\alpha=0,$$
$$(\alpha+\beta)\wedge\gamma=\alpha\wedge\gamma+\beta\wedge\gamma,\quad (k\alpha)\wedge\beta=k\alpha\wedge\beta$$

また，$\wedge^3(V)$ の中では，

$$\alpha\wedge\beta\wedge\gamma=\beta\wedge\gamma\wedge\alpha=\gamma\wedge\alpha\wedge\beta=-\alpha\wedge\gamma\wedge\beta=-\gamma\wedge\beta\wedge\alpha=-\beta\wedge\alpha\wedge\gamma$$
$$(\alpha_1+\alpha_2)\wedge\beta\wedge\gamma=\alpha_1\wedge\beta\wedge\gamma+\alpha_2\wedge\beta\wedge\gamma,\quad (k\alpha)\wedge\beta\wedge\gamma=k\alpha\wedge\beta\wedge\gamma$$

$\alpha\wedge\beta\wedge\gamma$ で α,β,γ の中の2つを入れかえると符号が変わる．このことは，$\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_r$ でも成り立つ．

Q．この辺で一息入れて下さい．テンソル積 $\alpha\otimes\beta$, $\alpha\otimes\beta\otimes\gamma$ から外積 $\alpha\wedge\beta$, $\alpha\wedge\beta\wedge\gamma$ を導くところはよくわかりました．外積というのも，テンソル積の元なのですね．

A．そうです．しかし，次のような見方もできます．たとえば，V^2 を交代化 A_2 でそれ自身の中へ写すとき，0へ移るもの全体は部分ベクトル空間になりますが，これを N としますと，$\wedge^2(V)$ は V^2 を N で剰余類に分けてできるベクトル空間としても定義できます．この定義ですと，$\alpha\wedge\beta$ というのは，A_2 で $\frac{1}{2}(\alpha\otimes\beta-\beta\otimes\alpha)$ へ移る V^2 の元全体ということになります．

Q．このように，もってまわった定義の方が何かよいことがあるのですか．

A．それは，基礎をもっと精密にやるときは，その方がよいときもあるのですが，ここでの話では，そこまで行くことはないと思います．

Q．外積の計算規則は，矢線ベクトルの外積のところで慣れていますが，これらの規則は定義から証明できるわけですね．

A．そうです．少しやってごらんなさい．

Q．$\alpha\wedge\beta=\frac{1}{2}(\alpha\otimes\beta-\beta\otimes\alpha)$ ですから，$\alpha\wedge\beta=-\beta\wedge\alpha$ はすぐわかります．また，$(\alpha+\beta)\wedge\gamma=\frac{1}{2}((\alpha+\beta)\otimes\gamma-\gamma\otimes(\alpha+\beta))$．ここでテンソル積の計算で，$(\alpha+\beta)\otimes\gamma=\alpha\otimes\gamma+\beta\otimes\gamma$, $\gamma\otimes(\alpha+\beta)=\gamma\otimes\alpha+\gamma\otimes\beta$ となって，

$$(\alpha+\beta)\wedge\gamma=\frac{1}{2}(\alpha\otimes\gamma-\gamma\otimes\alpha)+\frac{1}{2}(\beta\otimes\gamma-\gamma\otimes\beta)=\alpha\wedge\gamma+\beta\wedge\gamma$$

$(k\alpha)\wedge\beta=k\alpha\wedge\beta$ も同じです．

Q．その通りです．ここまでは $\wedge^2(V)$, $\wedge^3(V)$ の中でのことでしたが，つぎにこれらの元の積を考えることにします．

$\wedge^r(V)$ の元 ϕ と $\wedge^s(V)$ の元 ψ との外積 $\phi\wedge\psi$ は，

$$\phi\wedge\psi=A_r(\phi\otimes\psi)$$

として定義される．これによると，$\wedge^2(V)$ の元 $\phi=\alpha\wedge\beta$ と $\wedge^1(V)=V$ の元 $\psi=\gamma$ については，

$$A_3(\phi\otimes\psi)=A_3((\alpha\wedge\beta)\otimes\gamma)=A_3\left(\frac{1}{2}(\alpha\otimes\beta-\beta\otimes\alpha)\otimes\gamma\right)$$

$$=\frac{1}{2}(A_3(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma)-A_3(\beta\otimes\alpha\otimes\gamma))=\frac{1}{2}(\alpha\wedge\beta\wedge\gamma-\beta\wedge\alpha\wedge\gamma)$$

$$=\frac{1}{2}(\alpha\wedge\beta\wedge\gamma+\alpha\wedge\beta\wedge\gamma)=\alpha\wedge\beta\wedge\gamma$$

したがって，　$(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma=\alpha\wedge\beta\wedge\gamma$

さらに一般に，

$$(\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_r)\wedge(\beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_s)=\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_r\wedge\beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_s$$

が成り立つ．

Q．証明は，上の $(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma$ にならってやれるのですか．

A．そうです．もう少しやってみましょう．

$$\phi=\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_r=\frac{1}{r!}\sum\varepsilon(i_1,\cdots,i_r)\alpha_{i_1}\otimes\cdots\otimes\alpha_{i_r}$$

$$\psi=\beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_s=\frac{1}{s!}\sum\varepsilon(j_1,\cdots,j_s)\beta_{j_1}\otimes\cdots\otimes\beta_{j_s}$$

($i_1,\cdots,i_r$ は $1,\cdots,r$ の順列，$j_1,\cdots,j_s$ は $1,\cdots,s$ の順列，和は順列の全体にわたる)

$\varepsilon=\varepsilon(i_1,\cdots,i_r)$ は $i_1,\cdots,i_r$ が $1,\cdots,r$ の偶順列のとき 1，奇順列のとき -1

とおいて，

$$A_{r+s}(\phi\otimes\psi)$$

$$=\frac{1}{r!s!}\sum\varepsilon(i_1,\cdots,i_r)\varepsilon(j_1,\cdots,j_s)A_{r+s}(\alpha_{i_1}\otimes\cdots\otimes\alpha_{i_r}\otimes\beta_{j_1}\otimes\cdots\otimes\beta_{j_s})$$

$$=\frac{1}{r!s!}\sum\varepsilon(i_1,\cdots,i_r)\varepsilon(j_1,\cdots,j_s)\alpha_{i_1}\wedge\cdots\wedge\alpha_{i_r}\wedge\beta_{j_1}\wedge\cdots\wedge\beta_{j_s}$$

$$=\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_r\wedge\beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_s$$

$\varepsilon(i_1,\cdots,i_r)$ に $\alpha_{i_1}\wedge\cdots\wedge\alpha_{i_r}$ をかけると，$\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_r$

これで一応外積算法の基礎をお話ししたことになります．

Q．外積算法は行列式と関係が深いのでしたね．前にも，

$$(p_1\alpha_1+p_2\alpha_2)\wedge(q_1\alpha_1+q_2\alpha_2)=\begin{vmatrix}p_1 & p_2\\ q_1 & q_2\end{vmatrix}\alpha_1\wedge\alpha_2$$

$$(p_1\alpha_1+p_2\alpha_2+p_3\alpha_3)\wedge(q_1\alpha_1+q_2\alpha_2+q_3\alpha_3)\wedge(r_1\alpha_1+r_2\alpha_2+r_3\alpha_3)$$

$$=\begin{vmatrix}p_1 & p_2 & p_3\\ q_1 & q_2 & q_3\\ r_1 & r_2 & r_3\end{vmatrix}\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\alpha_3$$

応用上は，このような計算がすらすらとやれればよい．

という計算をやりました．

4. テンソル

ここでは，V が実数体の上の n 次元のベクトル空間の場合を考える．そこでの基底を $\xi_1,\cdots,\xi_n$ とし，V の任意のベクトル ξ の成分を $x^1,\cdots,x^n$ というようにかくことにすると，

$$\xi=\sum_{i=1}^{n}x^i\xi_i=x^1\xi_1+\cdots+x^n\xi_n \tag{4.1}$$

ここでは，$x_1,\cdots,x_n$ でなく $x^1,\cdots,x^n$ と添数を上につけてかく．

と表わせる．いま，もう1組の基底を $\bar{\xi}_1,\cdots,\bar{\xi}_n$ とすると，

$$\bar{\xi}_i=\sum p_i{}^j\xi_j \tag{4.2}$$

ここでは，p_{ij} とかく代わりに $p_i{}^j$ とかく．（理由はあとからわかる）

というように表わすことができる．ここで $p_i{}^j$ $(i, j=1, \cdots, n)$ を要素にもつ n 次の行列式 $\det(p_i{}^j)$ は 0 でない．

この新しい基底 $\bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_n$ に関する V の元 ξ の成分を $\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^n$ とすると，

$$\xi=\sum_i \bar{x}^i\bar{\xi}_i \tag{4.3}$$

(4.2) を (4.3) に代入すると，

$$\xi=\sum_i (\bar{x}^i \sum_j p_i{}^j\xi_j)=\sum_{ij} \bar{x}^i p_i{}^j\xi_j=\sum_j (\sum_i \bar{x}^i p_i{}^j)\xi_j=\sum_i (\sum_j \bar{x}^j p_j{}^i)\xi_i$$

一般に，
$\sum_i (\sum_j a_{ij})$
$=\sum_{ij} a_{ij}=\sum_j (\sum_i a_{ij})$
$=\sum_i (\sum_j a_{ji})$

$\delta_{ij}=\begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$

これと (4.1) を較べて，

$$x^i=\sum p_j{}^i\bar{x}^j \tag{4.4}$$

そこで，行列 $(p_i{}^j)$ の逆行列を $(q_i{}^j)$ とすると，

$$\sum_k p_i{}^k q_k{}^j=\delta_i{}^j, \qquad \sum_k q_i{}^k p_k{}^j=\delta_i{}^j$$

そして，(4.4) から，

$$\bar{x}^i=\sum_j q_j{}^i x^j \tag{4.5}$$

したがって，V の基底の変換 (4.2) に対し，ベクトル ξ の成分の変換は (4.5) で表わされる．

つぎに，V の双対ベクトル空間 V^* を考え，V の基底 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ に対する双対基底を $\eta^1, \cdots, \eta^n$ とする．このことは，η^i $(i=1, \cdots, n)$ が ξ_j $(j=1, \cdots, n)$ を $\delta_j{}^i$ へ写すような V から実数体 R への線形写像であることを示している．つまり，$\eta^i(\xi_j)=\delta_j{}^i$ で，これを，

前には，η^i の代わりに φ_i とかいた．

$$\langle\xi_j, \eta^i\rangle=\delta_j{}^i \tag{4.6}$$

ともかくことは，前に述べたところである．いま，V の基底 $\bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_n$ に対する V^* の双対基底を $\bar{\eta}^1, \cdots, \bar{\eta}^n$ とすれば，

$$\langle\bar{\xi}_j, \bar{\eta}^i\rangle=\delta_j{}^i \tag{4.7}$$

ところが，$\bar{\eta}^i$ が V の R への線形写像であることから，(4.2) によって，

$$\langle\bar{\xi}_j, \bar{\eta}^i\rangle=\langle\sum_k p_j{}^k\xi_k, \bar{\eta}^i\rangle=\sum_k p_j{}^k\langle\xi_k, \bar{\eta}^i\rangle \tag{4.8}$$

(4.7) (4.8) と $(p_i{}^j)$ の逆行列が $(q_i{}^j)$ であることから，

$$\langle\xi_k, \bar{\eta}^i\rangle=q_k{}^i$$

これは，$\bar{\eta}^i$ が ξ_k を $q_k{}^i$ へ写す線形写像であることを示している．したがって，$\eta^1, \cdots, \eta^n$ の定義によって，

$$\bar{\eta}^i=\sum_k q_k{}^i\eta^k \tag{4.9}$$

V^* で，基底 $\eta^1, \cdots, \eta^n$ に対する任意のベクトル η の成分を $y_1, \cdots, y_n$ とし，新しい基底 $\bar{\eta}^1, \cdots, \bar{\eta}^n$ に対する η の成分を $\bar{y}_1, \cdots, \bar{y}_n$ とすると，(4.2) から (4.5) を導いたのと同じようにして，

$$\bar{y}_i=\sum_k p_i{}^k y_k \tag{4.10}$$

であることがわかる．

V の元を反変ベクトル，V^* の元を共変ベクトルという．

反変 contravariant
共変 covariant

さらに一般に，ベクトル空間 V に附随して 1 つの量 u があって，その V の任意の基底 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ についての成分を $u^1, \cdots, u^n$ とするとき，基底の変換 (4.2) に伴なう u の成分の変換が，

$$\bar{u}^i=\sum_k q_k{}^i u^k \tag{4.11}$$

で与えられるとき，u は反変ベクトルであるという．また，量 v があって，その V の基底 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ に対応する V^* の双対基底 $\eta^1, \cdots, \eta^n$ についての成分を $v_1, \cdots, v_n$ とするとき，基底の変換 (4.2)（これに伴なって (4.9)）に対して，v の成分が

$$\bar{v}_i=\sum_k p_i{}^k v_k \tag{4.12}$$

と変わるとき，v を共変ベクトルという．

Q．大分，混み入ったことになって来ましたね．ベクトルにも反変だの，共変だのとちがった種類があるのですね．これまでは，n 次元のベクトルといえば，きまったもののように思っていたのですが．

A．V と関連して双対空間 V^* を持ち出したからこういうことになったのです．もし，V が内積をもったベクトル空間で，基底 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ を単位直交系に限ると，基底の変換の行列 $(p_i{}^j)$ が直交行列となって，その逆行列 $(q_i{}^j)$ は $(p_i{}^j)$ の転置行列となる．したがって，(4.5) は，

$$\bar{x}^i=\sum_j p_i{}^j x^j$$

となって，x^i の変換法則と y_i の変換法則 (4.10) は全く同じことになってきます．つまり，単位直交系だけを考えているときは，共変と反変の区別はないことになります．

以上のような話を続けていくときは，和の記号 $\sum$ がたびたび出てくるので，これをいちいち書かないで，(4.1) (4.2) (4.11) (4.12) などを次のように略記するのが慣例である．

$$\xi=x^i\xi_i,\quad \bar{\xi}_i=p_i{}^j\xi_j,\quad \bar{u}^i=q_k{}^i u^k,\quad \bar{v}_i=p_i{}^k v_k$$

$x^i\xi_i$ での i や $p_i{}^j\xi_j$ での j のように上下に同じ添数があるとこれについて加える．

さて，$V^2=V\otimes V$ において，任意の元は V の基底 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ によって，

$$\alpha=a^{ij}\xi_i\otimes\xi_j$$

と表わされる．基底の変換 (4.2) によって，これが，

$$\alpha=\bar{a}^{ij}\bar{\xi}_i\otimes\bar{\xi}_j$$

の形になったとすると，$\xi_i=q_i{}^j\bar{\xi}_j$ であることと，テンソル積の計算法によって，

$$\alpha=a^{ij}(q_i{}^k\bar{\xi}_k)\otimes(q_j{}^h\bar{\xi}_h)=a^{ij}q_i{}^k q_j{}^h\bar{\xi}_k\otimes\bar{\xi}_h$$

であることから，

$$\bar{a}^{kh}=q_i{}^k q_j{}^h a^{ij} \tag{4.13}$$

同じように，$(V^*)^2=V^*\otimes V^*$ の元 $\beta=b_{ij}\eta^i\otimes\eta^j$ については，

$$\bar{b}_{kh}=p_k{}^i p_h{}^j b_{ij} \tag{4.14}$$

また，$V\otimes V^*$ の元 $\gamma=c_j{}^i\xi_i\otimes\eta^j$ については，

$$\bar{c}_h{}^k=q_i{}^k p_h{}^j c_j{}^i \tag{4.15}$$

$V\otimes V$ の元を2階の反変テンソル，$V^*\otimes V^*$ の元を2階の共変テンソル，$V\otimes V^*$ の元を2階の混合テンソルという．

さらに一般に，ベクトル空間 V に附随してきまる量 T があって，V の基底を定めると n^2 個の成分 (t^{ij}) がきまり，基底の変換 (4.2) に対して，(4.13) の法則 $\bar{t}^{kh}=q_i{}^k q_j{}^h t^{ij}$ に従って変わるとき，T は2階の反変テンソルであるという．

同じように，$T=(t_{ij})$ の変換法則が (4.14) のような場合，これは2階の共変テンソルであるといい，$T=(t_j{}^i)$ の変換法則が (4.15) のような場合，2階の混合テンソルという．

例1. $u=(u^i), v=(v^i)$ が反変ベクトルのとき，$T=(u^iv^j)$ は2階の反変テンソルである．これは，V^2 の元 $(u^i\xi_i)\otimes(v^j\xi_j)$ に他ならない．同じように，2つの共変ベクトル $u=(u_i), v=(v_i)$ に対して，$T=(u_iv_j)$ は2階の共変テンソルであり，反変ベクトル $u=(u^i)$，共変ベクトル $v=(v_i)$ に対して，$T=(u^iv_j)$ は2階の混合テンソルである．

例2. V の2つの元 ξ, η に対して定まる実数 $\varphi(\xi, \eta)$ があって，これが ξ, η のどちらについても線形であるとする．つまり，φ は2つの V の直積 $V\times V$ から実数の集合 R への双1次写像とする．このとき，基底 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ を使って，$\xi=x^i\xi_i, \eta=y^i\xi_i$ とすると，φ は

$$\varphi(\xi, \eta)=\varphi(x^i\xi_i, y^j\xi_j)=x^iy^j\varphi(\xi_i, \eta_j)$$

そこで，$t_{ij}=\varphi(\xi_i, \eta_j)$ とおくと，

$$\varphi(\xi, \eta)=t_{ij}x^iy^j$$

この写像 $\varphi=(t_{ij})$ は2階の共変テンソルになっている．

例3. V から V への線形写像 φ を考えよう．
$\eta=\varphi(\xi)$ とし，ξ, η を成分を使って表わすと，

$$y^i\xi_i=\varphi(x^i\xi_i)=x^i\varphi(\xi_i)$$

そこで，$\varphi(\xi_i)=t_i{}^j\xi_j$ とおくと，

$$y^i=t_j{}^ix^j$$

このことから，$\varphi=(t_j{}^i)$ が2階の混合テンソルであることがわかる．

Q. 大体わかりました．そうしますと，外積はこの立場でいうとどうなるのですか．

A. それを次にお話ししましょう．

一般に，$V^r=V\otimes\cdots\otimes V$ (r 個の積)，$(V^*)^s=V^*\otimes\cdots\otimes V^*$ (s 個の積) から $V^r\otimes(V^*)^s$ を作って，その元を反変 r 階，共変 s 階のテンソルという．ここでは，$V^r, (V^*)^s$ の場合を考え，後者について話を進める．

$(V^*)^s$ の元は，V^* の基底 $\eta^1, \cdots, \eta^n$ によって，

$$\alpha=a_{i_1\cdots i_s}\eta^{i_1}\otimes\cdots\otimes\eta^{i_s}$$

と表わされる．これが，各項で $\eta^{i_1}\otimes\cdots\otimes\eta^{i_s}$ に同じ置換 σ を施こすとき，結局同じ α に帰着するならば，α を対称テンソルという．これは，$a_{i_1\cdots i_s}$ で，$i_1, \cdots, i_s$ に置換を施したものがはじめのものと一致することで，$\alpha=a_{ij}\eta^i\otimes\eta^j$ でいえば $a_{ij}=a_{ji}$ である．

つぎに，α に交代化 A_s を行なうことを考えよう．2階のときは，

$$A_2(a_{ij}\eta^i\otimes\eta^j)=a_{ij}A_2(\eta^i\otimes\eta^j)=a_{ij}\frac{1}{2}(\eta^i\otimes\eta^j-\eta^j\otimes\eta^i)$$

$$=\frac{1}{2}(a_{ij}-a_{ji})\eta^i\otimes\eta^j$$

$$A_3(a_{ijk}\eta^i\otimes\eta^j\otimes\eta^k)=a_{ijk}A_3(\eta^i\otimes\eta^j\otimes\eta^k)$$

$$=\frac{1}{6}(a_{ijk}+a_{jki}+a_{kij}-a_{ikj}-a_{kji}-a_{jik})\eta^i\otimes\eta^j\otimes\eta^k$$

これらは交代テンソルと呼ばれるものである．これは外積の定義によると，$a_{ij}\eta^i\wedge\eta^j$, $a_{ijk}\eta^i\wedge\eta^j\wedge\eta^k$ に他ならない．

以上は，$(V^*)^2$, $(V^*)^3$ で考えたが，$(V^*)^s$, $(V)^r$ についても同様である．

練 習 問 題

1. ξ_1, ξ_2, ξ_3 を V の元とするとき，次の式を展開せよ．
   (1) $(a_1\xi_1+a_2\xi_2+a_3\xi_3)\wedge(b_1\xi_1+b_2\xi_2+b_3\xi_3)$
   (2) $(a_1\xi_1+a_2\xi_2)\wedge(b_1\xi_1+b_2\xi_2)\wedge(c_1\xi_1+c_2\xi_2)$
2. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ が V の元で，$\omega=\alpha_1\wedge\beta_1+\alpha_2\wedge\beta_2+\alpha_3\wedge\beta_3$ のとき，$\omega\wedge\omega\wedge\omega$ を求めよ．
3. $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_s$ が V の元のとき，次の公式を証明せよ．
$$\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_r\wedge\beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_s=(-1)^{rs}\beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_s\wedge\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_r$$
4. $(V^*)^2$ の1つの元を $\Omega=a_{ij}\eta^i\otimes\eta^j$ とし，V の任意の2つの元を α, β とするとき，$\Omega(\alpha, \beta)=a_{ij}\langle\alpha, \eta^i\rangle\langle\beta, \eta^j\rangle$ によって $V\times V$ から実数体 R への双1次写像が得られることを示せ．とくに，$\Omega=\eta_i\wedge\eta_j$ のときはどうなるか．
5. $(V^*)^3$ の1つの元を $\Omega=a_{ijk}\eta^i\otimes\eta^j\otimes\eta^k$ とするとき，V の任意の3つの元を α, β, γ とすると，$\Omega(\alpha, \beta, \gamma)=a_{ijk}\langle\alpha, \eta^i\rangle\langle\beta, \eta^j\rangle\langle\gamma, \eta^k\rangle$ によって $V\times V\times V$ から R への3重1次写像が得られる．とくに $\Omega=\eta_i\wedge\eta_j\wedge\eta_k$ のときはどうか．
6. 成分 $(\delta_i{}^j)$ をもつ量は混合テンソルであることを示せ．
7. $(t_i{}^j)$ が2階の混合テンソルの成分であるとき，$t_i{}^i$ は基底のとり方に関係しない実数（スカラー）であることを示せ．　$t_i{}^i=\sum_i t_i{}^i$

答

1. (1) $(a_2b_3-a_3b_2)\xi_2\wedge\xi_3+(a_3b_1-a_1b_3)\xi_3\wedge\xi_1+(a_1b_2-a_2b_1)\xi_1\wedge\xi_2$　(2) 0
2. $-6\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\alpha_3\wedge\beta_1\wedge\beta_2\wedge\beta_3$
4. $\langle\alpha, \eta_i\rangle\langle\beta, \eta_j\rangle-\langle\alpha, \eta_j\rangle\langle\beta, \eta_i\rangle$
5. $\langle\alpha, \eta^i\rangle, \langle\alpha, \eta^j\rangle, \langle\alpha, \eta^k\rangle$ を第1行，$\langle\beta, \eta^i\rangle, \langle\beta, \eta^j\rangle, \langle\beta, \eta^k\rangle$ を第2行，$\langle\gamma, \eta^i\rangle, \langle\gamma, \eta^j\rangle, \langle\gamma, \eta^k\rangle$ を第3行にもつ行列式

第2章　接空間と双対接空間

曲線は1次元の拡がりをもった図形であり，曲面は2次元の拡がりをもった図形であって，これらはそれぞれ，1つ，2つの媒介変数(パラメーター)を使って表わすことができる．これを一般化したのが n 次元の多様体で，それは局所的には $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ という n 個の実数できまる点の集まりとして定義される．

多様体 manifold

曲線や曲面の研究では，その上の各点でひいた接線や接平面が基本的な役割をする．一般の多様体でもこうしたものを考えることが望ましいが，曲線や曲面が3次元の空間の中に置かれているのとちがって，多様体は別にもっと高い次元の空間の中に置かれているというわけではないので，接線や接平面に当るものを考えるのには，くふうが必要である．こうして考えられるのが，接空間と称するベクトル空間であり，その双対ベクトル空間として双対接空間が考えられる．

1次微分作用素や微分形式は，こうした接空間や双対接空間をもとにしてはじめて明確にとらえられるようになったのであって，1930年代まではどうしてもあいまいさの残っていた dx, dy, dz といった微分の意義も，これによって現代的に確立されたのである．

1.　局所微分多様体の接空間

3次元の空間に置かれた曲面 S において，その上の点Pの位置ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とし，その直角成分，つまりPの直角座標 x, y, z が媒介変数 u_1, u_2 を使って，

$$x=f(u_1, u_2),\quad y=g(u_1, u_2),\quad z=h(u_1, u_2) \tag{1}$$

で与えられているとする．これらの関数は何回でも微分できるものとする．

今後，でてくる関数はすべて何回でも微分可能(C^∞ 級)とする．

いま，曲面 S の上で点Pを通る曲線が

$$u_1=u_1(t),\quad u_2=u_2(t)$$

で与えられると，点Pでの接線ベクトルは，

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1}\frac{du_1}{dt}+\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_2}\frac{du_2}{dt}$$

Pを通るいろいろな曲線 C を考えて，

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1},\quad \boldsymbol{e}_2=\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_2}$$

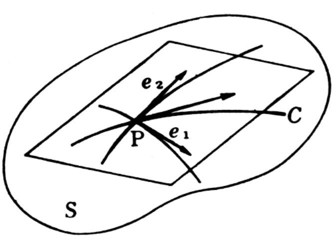


図　1

$\boldsymbol{e}_1$ は u_2＝一定としてできる曲線の接線ベクトル，$\boldsymbol{e}_2$ では u_1＝一定

とおくと，これは点Pの位置にのみ関係してきまり，曲線 C のとり方には関係していない．そして，

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\frac{du_1}{dt}\boldsymbol{e}_1+\frac{du_2}{dt}\boldsymbol{e}_2 \tag{2}$$

とかける．この場合

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1}=\left(\frac{\partial x}{\partial u_1},\ \frac{\partial y}{\partial u_1},\ \frac{\partial z}{\partial u_1}\right),$$

$$\boldsymbol{e}_2=\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_2}=\left(\frac{\partial x}{\partial u_2},\ \frac{\partial y}{\partial u_2},\ \frac{\partial z}{\partial u_2}\right)$$

は1次独立であるとしておく．

この条件を曲面の定義に入れておく．

こうして，曲面 S の上の1点Pを通る曲線の接線ベクトルというのは，$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ を使って (2) の形に表わされることがわかった．曲線から離れて考えると，任意の数 a_1, a_2 について，$a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2$ で定まるベクトルが，点Pでの曲面 S の接線である．

この考えをもとにして，n 次元多様体の1点での接ベクトルと，その集まりであるところの接ベクトル空間を次のように定義する．

接ベクトル
tangent vector

集合 M があって，その要素を点と呼ぶとき，これが n 個の実数 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ と1対1に対応し，この実数の組の全体が R^n の中で開集合 D をなしているとする．このとき，M を局所的な n 次元の微分多様体といい，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ を M の点の(局所)座標という．たとえば，3次元の空間の曲面(1)で，(x, y, z) と (u_1, u_2) との対応が1対1であれば，これは2次元の局所多様体で，u_1, u_2 が局所座標である．

以下，局所多様体，局所座標を，単に多様体，座標ということにする．

局所座標
local coordinates

多様体では，座標のとり方はいろいろある．そこで，

$$y_i=\varphi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)\qquad (i=1, 2, \cdots, n)\tag{3}$$

という式によって，座標の変換

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)\longrightarrow(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

を考える．ここで，この対応は1対1で，$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ はすべて C^∞ 級，かつ変換の関数行列式について，

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_2}\\ & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}\neq 0$$

としておく．このとき，(3) を逆に考えた

$$x_i=g_i(y_1, y_2, \cdots, y_n)\qquad (i=1, 2, \cdots, n)\tag{4}$$

も C^∞ 級であることが証明できるのであるが，その証明はかなり面倒であるので，ここでは，これも仮定しておく．

たとえば，松島与三著「多様体入門」p. 18

これから多様体 M では，このような座標系のすべてを考慮に入れていくものとする．

まず，M の任意の点 p を考え，この点を通る任意の曲線を

$$c:\quad x_i=x_i(t)\qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

とする．そして，p では $t=t_0$ であるとして，

$$a_i=\left(\frac{dx_i}{dt}\right)_{t=t_0}\ (i=1, 2, \cdots, n)$$

とおいて，n 次元の数ベクトル $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ を考える．

いま，M の点 p に対して，n 次元のベクトル空間 V_p を考え，その中に基底 $e_1, \cdots, e_n$ をとって，上の数ベクトル $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ に，V_p のベクトル

$$a = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n$$

を対応させる．この n 次元のベクトル空間 V_p を，M の点 p での接空間といい，そのベクトルを接ベクトルという．

これからは，ベクトルもふつうの活字で表わすことにする．
接空間
tangent space
接ベクトル
tangent vector

そこで，座標の変換 (3) と接空間の関係をしらべてみよう．このとき，曲線 c は，

$$y_i = \varphi_i(x_1(t),\ x_2(t), \cdots, x_n(t))$$

で表わされる．したがって，

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_j \frac{\partial y_i}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt}$$

そこで，点 p のところで考えると，$t = t_0$ だから，

$$b_i = \left(\frac{dy_i}{dt}\right)_{t=t_0}, \quad p_{ij} = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_p$$

(　)$_p$ は点 p での値を示す．

とおくと，

$$b_i = \sum_j p_{ij}a_j \tag{5}$$

そこでいま，p での接空間 V_p の中で，

$$e_i = \sum_j p_{ji}f_j \tag{6}$$

によってきまる基底 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ をとって考えると，

$$\sum_i a_ie_i = \sum_i b_if_i \tag{7}$$

であることが(5)(6)によってわかる．これは，次のことを意味する．

座標系 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に対して接空間内に基底 $e_1, e_2, \cdots, e_n$

座標系 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ に対して接空間内に基底 $f_1, f_2, \cdots, f_n$

を定めるとき，それらが (6) で結ばれているならば，同じ曲線 c を２つの座標系について表わしたものからできる２つの数ベクトル $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ は接空間の中で同じベクトルを表わす．

つまり，媒介変数 t の定められた曲線 c は，点 p での接空間内に定まったベクトルをきめる．これが曲線 c の接線ベクトルである．

Q．いろいろと質問があります．曲面では接平面の図をかきましたが，多様体の接空間というのは図にはかけないのですね．

A．そうです．しかし，象徴的な意味でかくこともあります．

Q．接空間というのは，$(x_1, \cdots, x_n) \to (e_1, \cdots, e_n)$，$(y_1, \cdots, y_n) \to (f_1, \cdots, f_n)$ という２つの座標系に対して考えた基底が，座標の変換に対して辻つまの合うように出来ているもののようですが，２つの座標系だけでなく座標系の全部についてこれで話が合うのでしょうか．

A．大切な所に気がつきましたね．それを確かめておきましょう．まず，上の２つの座標系の場合でも，逆に，

$$(y_1, \cdots, y_n) \longrightarrow (x_1, \cdots, x_n) \tag{8}$$

という変換の場合を考えてみますと，

$$q_{ij}=\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right)_p$$

とおくと，$n\times n$ 行列 (q_{ij}) は (p_{ij}) の逆行列になっていて，(6) から，

$$f_i=\sum_j q_{ji}e_j \tag{9}$$

となります．ですから，(3) に対してきめた基底の変換 (6) と (4) に対する基底の変換 (9) とは，実質的に同じです．次に，

$$(y_1,\cdots,y_n)\longrightarrow(z_1,\cdots,z_n)$$

という座標の変換を (7) に重ねて

$$(x_1,\cdots,x_n)\longrightarrow(z_1,\cdots,z_n) \tag{10}$$

を考え，

$$r_{ij}=\left(\frac{\partial y_i}{\partial z_j}\right)_p$$

とおくと，$(z_1,\cdots,z_n)$ に対応する V_p の基底 $g_1,\cdots,g_n$ は，

$$g_i=\sum_j r_{ji}f_j$$

できまるわけですが，これと (9) から，

$$g_i=\sum_j s_{ji}e_j \tag{11}$$

の形の式が得られる．ここで，

$$s_{ji}=\sum_k r_{ki}q_{jk}=\sum_k\left(\frac{\partial y_k}{\partial z_i}\right)_p\left(\frac{\partial x_j}{\partial y_k}\right)_p=\left(\frac{\partial x_j}{\partial z_i}\right)_p$$

となっているので，(11)は座標の変換(10)に対応する基底の変換になっているのです．

Q．つまり，どの座標系から出発しても，接空間での基底のとり方は同じになるというわけですね．ここのお話でも，同値律が関連しているようですが．

A．その通りです．結局，$(q_{ij})=(p_{ij})^{-1}$，$(s_{ij})=(q_{ij})(r_{ij})$ という関数行列の関係と (7) とから抑えていってもよいのです．

Q．大体わかりました．しかし，接空間というのがもう一つピンと来ません．無理かもしれませんが，何かもっと具体的にいえませんか．

A．それがあるのです．次にお話しします．

多様体 M で，座標の変換 (3) に対して，(6) のように変わるのが接空間での基底であった．これと同じような法則で変わるものを考えてみよう．

M の点の関数 φ は，局所座標についての関数である．そして，

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=\sum_j\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial y_j},\text{ だから，点 }p\text{ では，}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p=\sum_j p_{ji}\frac{\partial}{\partial y_j} \tag{12}$$

この変換法則は (6) と同じである．そこで，

$$e_i=\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \tag{13}$$

を接空間の基底としてとることにする．そうすれば，接ベクトルは，

$$\sum_i a_i e_i = \sum_i a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

となる．つまり，

接ベクトルは，点 p で考えた１次微分作用素，接空間はその全体

といえる．

Q．具体的といっても，今度は微分作用素をベクトルとみるわけですね．これなら，点 p でだけでなくて，各点で $\sum a_i(x_1, \cdots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_i}$ というような微分作用素が考えられることになりますが．

A．その通りです．こうしたものは，あとから考えます．

Q．もう一つ質問させて下さい．はじめのうち，局所的ということがしきりに出てきたのですが，ここで大局的というのは何をいうのですか．

局所的 local
大局的 global

A．それは，こういうことです．たとえば，３次元の空間で，

$$\text{球面} \quad x^2+y^2+z^2=1 \tag{14}$$

を考えると，これは球面座標 (θ, φ) を使って，

$$x=\sin\theta\cos\varphi, \quad y=\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z=\cos\theta$$

と表わせます．このとき，

$$0 \leqq \theta \leqq \pi, \ 0 \leqq \varphi < 2\pi$$

で一応球面全体がつくせるのですが，

$\theta=0, \pi$ では φ の値がきまらない．

$\varphi=0$ のところでは，点の位置の変化と φ の値の変化に断絶がある

という２つの事情があります．こうしたことから，球面の上でいろいろのことを考えるとき，$\theta=0$, $\theta=\pi$ のところなどでは，絶えず注意が要るのです．そうした心配のないようにしようとすると，$\theta=0, \pi$ や $\varphi=0$ のところは除外して考えなくてはならなくなります．その意味で，θ, φ では球面全体は尽せなくて，大局的でなく局所的となるのです．

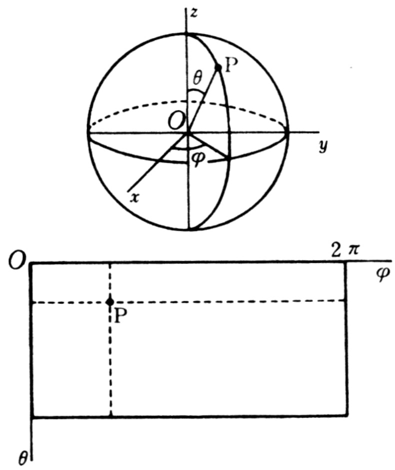


図 2

Q．そうしますと，大局的に球面全体を考えるのには，どうしたらよいのでしょうか．

A．それは，球面をいくつかの面分で覆って各面分で座標を考えるのです．

Q．ああそうですか．(14)ですと，

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2}, \qquad z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$$

になりますね．

面分（曲面分）
a piece of surface

A．それでは駄目です．$z=0$ のところがただ貼りついているだけで，そこでの局所座標が考えられていません．(14)を $z>0$, $z<0$, $x>0$, $x<0$, $y>0$, $y<0$ の６つの面分にすれば，大丈夫です．

Q．なかなか面倒なものですね．それで局所的なことだけ考えていこうという

のですね．

A．そうです．当分そうします．そして，あとから大局的なことに入っていきます．

2. 双対接空間

まず一般に，ベクトル空間 V に対して，V から実数の集合 R への線形写像の全体を考え，これをベクトル空間としてとらえることができる．これが V の双対ベクトル空間 V^* である．V が有限次元のときは，その中で基底 $e_1, \cdots, e_n$ をきめると V の元 x の成分 $x_1, \cdots, x_n$ が定まる．そうすると V^* の元 φ は，

双対 dual
双対ベクトルを，コベクトル (covector) ともいう．

$$x \longrightarrow \varphi(x)=a_1x_1+\cdots+a_nx_n \quad (a_1, \cdots, a_n \text{ は定数})$$

という線形写像と考えられる．そして，

$$\varphi_i(e_j)=\delta_{ij}$$

である線形写像 φ_i をとると，上で述べた φ は，$\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ を基底として，

$$\varphi=\sum_i a_i\varphi_i$$

とかける．この V^* の基底を V の基底 $e_1, \cdots, e_n$ の双対基底という．

V の基底の変換 $e_1, \cdots, e_n \to f_1, \cdots, f_n$ が

$$e_i=\sum_j p_{ji}f_j \tag{15}$$

で与えられているとき，$e_1, \cdots, e_n$ の双対基底 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ から $f_1, \cdots, f_n$ の双対基底 $\psi_1, \cdots, \psi_n$ への変換は，

$$\varphi_i=\sum_j q_{ij}\psi_j \qquad ((q_{ij}) \text{ は } (p_{ij}) \text{ の逆行列}) \tag{16}$$

で与えられる．

そこで，多様体 M の点 p での接空間 V_p に対して，その双対接空間 $V_p{}^*$ を調べてみよう．

まず，2組の座標系 $x_1, \cdots, x_n$ と $y_1, \cdots, y_n$ を考えると，それぞれに対応する V_p の基底

$$e_i=\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p, \qquad f_i=\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_p$$

の間には，(12)からわかるように，

$$e_i=\sum_j p_{ji}f_j \quad \text{ここで} \quad p_{ij}=\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_p \tag{17}$$

という関係がある．

したがって，$e_1, \cdots, e_n$ の双対基底を $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ とし，$f_1, \cdots, f_n$ の双対基底を $\psi_1, \cdots, \psi_n$ とすると，(16) によって，

$$\varphi_i=\sum_j q_{ij}\psi_j \quad \text{ここで，} \quad q_{ij}=\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right)_p \tag{18}$$

となる．いま，M 上で点の関数 F を考え，座標系 $x_1, \cdots, x_n$ に関して，$V_p{}^*$ のベクトル

$V_p{}^*$ のベクトルを双対接ベクトルという．

$$\sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_p \varphi_i$$

を作ると，座標系の変換 $x_1, \cdots, x_n \to y_1, \cdots, y_n$ に対して，(18) により，

$$\sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_p \varphi_i = \sum_{ij} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_p \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right)_p \psi_j = \sum_j \left(\frac{\partial F}{\partial y_j}\right)_p \psi_j$$

となって，これが座標系のとり方に関係しないできまるベクトルであることがわかる．そこで，これを関数 F の点 p での微分といって，$(dF)_p$ とかく．つまり，

微分 differential

$$(dF)_p = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_p \varphi_i \tag{19}$$

とくに，$F = x_i$ のときは，　$(dx_i)_p = \varphi_i$

したがって，

$$(dF)_p = \sum_p \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_p (dx_i)_p$$

また，定義(19)から，p での微分について次の式の成り立つことは，容易にわかる．

F, G が関数，c が定数のとき，

$$(d(F+G))_p = (dF)_p + (dG)_p, \quad (d(cF))_p = c(dF)_p$$

$$(d(FG))_p = (dF)_p G_p + F_p (dG)_p$$

Q．いちいち p をつけて書くのは面倒ですね．取ってはいけませんか．

A．それは，この辺では p でのことばかりですから，取ってもよいでしょうが，あとから p を取った dF, dx_i が出てくるので，概念の明確化ということから付けておいた方がよいでしょう．書くことの節約が思考の節約になるわけでもありませんから．

Q．これでやっと p での微分 $(dF)_p$ がはっきりと定義できたわけですね．接空間から双対接空間，その元としての $(dF)_p$ というのでしたから，仲々遠い道でした．しかし，これまでの微分がそんなにあいまいな点があったのでしょう．

A．応用上は，関数 F についての微小変化 ΔF の1次近似として dF を考えるわけですが，数学でこれを明確にとらえようとすると，一応はわかったようでいて，よく考えるとわからなくなってしまうというのが，在来の微積分での微分でした．ちょっと，1変数の場合に復習してごらんなさい．

Q．$F = F(x)$ とします．また，p は取ってやってもよいですね．

まず，x の値の変化 h に対して，

$$dF = F'(x)h \tag{A}$$

によって dF を定義します．これは x と h の2変数の関数です．だから，とくに $F = x$ ととると，$F' = 1$ だから $dx = h$ となって，

$$dF = F'(x)dx \tag{B}$$

ここまでは問題はありませんね．そこで，変数を x から y へかえますと，F を y の関数と考えて，

$$\frac{dF}{dy} = \frac{dF}{dx}\frac{dx}{dy}, \quad \text{また，} \quad dx = \frac{dx}{dy}dy \tag{C}$$

であることから，

$$dF = \frac{dF}{dy}dy \tag{D}$$

となって，dF は変数のとり方に関係しないというのです．

A．一応そうですね．しかし，どこかに飛躍はありませんか．

Q．ちょっとわかりません．

A．それなら，y の方からの dF の定義というのは何ですか．

Q．それは，F を y の関数とみて，

$$dF=\frac{dF}{dy}k \qquad \text{(E)}$$

ここで，y と k は独立な変数です．

A．これと (A) とがどう結びつくのですか．

Q．それは (C) です．これによると，$h=\dfrac{dx}{dy}k$. ああこれは，はじめから約束していませんね．密輸入だ！　ここが明確でないのですね．ここをはっきり抑えておけばよいのではありませんか．

(B) での dx と (C) での dx は，本来ちがったものである．

A．そうです．だから (A) で x と h, y と k はそれぞれ独立な変数といっても h, k は変数の変換では関連しているのです．

2変数の関数でいうと，$z=f(x, y)$ のとき，

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

ですが，dz はベクトルで, dx, dy を基底にとったときの成分が $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$ といったことになるわけです．そして，変数の変換 $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$ は基底の変換へつながっていくということになります．

一般に，n 次元ベクトル空間 V とその双対空間 V^* のベクトルが，双対基底を使って

$$a=\sum_i a_i e_i, \quad \varphi=\sum_i b_i\varphi_i$$

と表わされているときは，

$$\langle a, \varphi\rangle=\varphi(a)=\sum_i a_i b_i$$

したがって，多様体 M の点 p での V_p と $V_p{}^*$ でいえば，

$$\left\langle\sum_i a_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p, \quad \sum_i b_i(dx_i)_p\right\rangle=\sum_i a_i b_i$$

また，とくに，

$$\left\langle\sum_i a_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p, \ (dF)_p\right\rangle=\sum_i a_i\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_p$$

3．1次微分作用素と1次微分式

多様体 M の各点 p で接空間 V_p を考え，座標系 $x_1, \cdots, x_n$ に対して基底

$$e_i=\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

をとる．これをこの座標系についての自然基底と呼ぶ．これについて，n 個の関数 $a_i=a_i(x_1, \cdots, x_n)$ $(i=1, \cdots, n)$ によって $(a_1, \cdots, a_n)$ を成分にもつベクトルが各 V_p 内に定まる．これを，

$$\sum_i a_i(x_1, \cdots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

で表わすことにする．これが1次微分作用素である．これを接ベクトル場ともいう．

接ベクトル場 tangent vector field

2つの1次微分作用素の和は，

$$\sum a_i\frac{\partial}{\partial x_i}+\sum b_i\frac{\partial}{\partial x_i}=\sum_i (a_i+b_i)\frac{\partial}{\partial x_i},$$

関数 $m=m(x_1, \cdots, x_n)$ を掛けることは，

$$m\left(\sum_i a_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)=\sum_i ma_i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

で定義される．これは，各 V_p でのベクトルの和，実数倍に呼応する．

つぎに，双対接空間 $V_p{}^*$ で双対基底 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ を考え，これについて，$b_i=b_i(x_1, \cdots, x_n)$ $(i=1, \cdots, n)$ できまる $(b_1, \cdots, b_n)$ を成分にもつベクトルを各 $V_p{}^*$ で定める．これを，

$$\sum_i b_i(x_1, \cdots, x_n)dx_i$$

で表わすことにする．これが1次微分式である．これを双対ベクトル場ともいう．

1次微分式（1次微分形式）は 1-form という．

関数 F についてきまる

$$dF=\sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}dx_i$$

が F の微分であって，これを F の勾配ベクトル場または単に勾配という．これについて，次のよく知られた関係が成り立つ．

勾配 gradient

F, G が関数で，c が定数のとき，

$$d(F+G)=dF+dG,\quad d(cF)=cdF$$
$$d(FG)=dF\cdot G+FdG$$

さらにまた，

$$\left\langle\sum_i a_i\frac{\partial}{\partial x_i},\ dF\right\rangle=dF\left(\sum_i a_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)=\sum_i a_i\frac{\partial F}{\partial x_i}$$

Q．これでやっと微分がきまったわけですね．ところで，ベクトル代数で学んだところによりますと，ベクトル空間 V のベクトルを反変ベクトル，双対空間 V^* のベクトルを共変ベクトルと呼び，反変ベクトルでは成分を $(a^1, \cdots, a^n)$，共変ベクトルの成分は，$(b_1, \cdots, b_n)$ のように書くのでした．また，

$$a^ib_i=\sum_i a^ib_i=a^1b_1+\cdots+a^nb_n$$

のような簡略記号や，テンソルのことも学びました．こうしたことは，接空間や双対接空間でも通用すると思います．どうして，これまで出てこなかったのですか．

A．もちろん，君のいわれるとおりです．しかし，これまでは，接空間や双対空間ということをよく理解して頂くことに全力を注いで，慣れない書き方や記号を持出すことを遠慮したのです．それに，こうした記号は，多量の計算を行なうとき生きてくるものですが，これまではその必要はなかったので

す．次に，そのお話しをしましょう．

4. テンソル場

多様体 M で座標を $x^1, \cdots, x^n$ で表わすと，ベクトル場(反変ベクトル場)および双対ベクトル場(共変ベクトル場)はそれぞれ

$$a_i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad b_j(x)dx^j \qquad (x=(x^1, \cdots, x^n))$$

と表わされる．また，接空間 V_p から考えたテンソル積 $V_p \otimes V_p$ の元

$$(a^{ij})_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p$$

が2階の反変テンソルで，各 V_p で考えたそうしたテンソルの集まり

$$a^{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}$$

が2階の反変テンソル場である．同じようにして，

2階の共変テンソル場　　$b_{ij}(x)dx^i \otimes dx^j$

2階の混合テンソル場　　$c_i{}^j(x)dx^i \otimes \dfrac{\partial}{\partial x^j}$

を考えることができる．

反変テンソル場 $(a^{ij}=a^{ij}(x))$ や共変テンソル場 $(b_{ij}=b_{ij}(x))$ で

$$a^{ij}=a^{ji}, \qquad b_{ij}=b_{ji}$$

となっているとき，これらは対称テンソル場であるといい，

$$a^{ij}=-a^{ji}, \qquad b_{ij}=-b_{ji}$$

であるときに，これらは交代テンソル場であるという．

これらの対称，交代の定義は，基底のとり方を変えても同じことに帰着する．(well-defined)

とくに，共変交代テンソル場では，

$$b_{ij}dx^i \otimes dx^j = \frac{1}{2}(b_{ij}dx^i \otimes dx^j + b_{ji}dx^j \otimes dx^i)$$

$$= b_{ij}\frac{1}{2}(dx^i \otimes dx^j - dx^j \otimes dx^i)$$

ところが，外積の定義から考えて，これは，

$$b_{ij}(x)dx^i \wedge dx^j$$

と考えられる．これを2階の外微分形式，または単に微分形式という．

一般に，ベクトル x, y について，
$x \wedge y = \frac{1}{2}(x \otimes y - y \otimes x)$

このように考えて，3階以上のテンソル場，たとえば，

$$a^{ij}{}_k(x)\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes dx^k, \qquad a_{ijk}(x)dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k$$

や，3階の微分形式

$$a_{ijk}(x)dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$$

を考えることができる．

Q．大分，複雑な話になって来ましたね．テンソル代数のことをもう一度しっかり復習してから考えてみます．ところで実際の例ですが，この講座の主題の微分形式というのが，ここで初めて定義されたわけですね，もっと別のテンソル場を教えて頂けませんか．

A．これからそうしたお話しが一ぱい出てくるわけですが，ここでは計量基本テンソルのことをお話ししておきましょう．

初めに述べた3次元空間の曲面Sで媒介変数u_1, u_2は，Sを多様体とみたときの局所座標である．ここでは，これをu^1, u^2とかく．S上の曲線$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$ $(t_1 \leqq t \leqq t_2)$の長さは，

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}, \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right)^{\frac{1}{2}}dt$$

(2)をこれに代入して，

$$g_{ij}=(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j), \quad v^i=\frac{du^i}{dt}$$

とおくと，

$$L=\int_{t_1}^{t_2}(g_{ij}v^iv^j)^{\frac{1}{2}}dt$$

ここで，

$$g_{ij}du^i \otimes du^j \tag{20}$$

は共変対称テンソル場になっている．これを曲面の基本テンソルという．

Q．証明は，$u^i=u^i(w^1, w^2)$ $(i=1, 2)$という座標変換に対して，

$$g_{ij}=(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)=\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^i}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^j}\right), \quad h_{ij}=\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial w^i}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial w^j}\right), \quad p_i{}^j=\frac{\partial w^j}{\partial u^i}$$

について，

$$g_{ij}=p_i{}^l p_j{}^m h_{lm}$$

となることを示せばよいわけですね．これはすぐ出来そうです．

ところで，よく，

$$ds^2=g_{ij}du^idu^j \tag{21}$$

という表わし方を見ますが，これは$g_{ij}du^i \otimes du^j$とどうちがうのですか．

A．以前は，テンソルという概念でもここで述べているように，ベクトル空間や接空間を明確にしてそれから出発するわけではなかったのです．それで，今でも(20)を(21)の書き方で表わします．

Q．(20)と$g_{ij}\dfrac{du^i}{dt}\dfrac{du^j}{dt}$というようなものとは，どう関係づけられるのですか．

A．それは，$V_p{}^*$の元$(du^i)_p$というのは，$V_p \to R$という線形写像で，V_pの元$\left(a_i\dfrac{\partial}{\partial u^i}\right)_p$に対して，

$$\left\langle (du^i)_p, \left(a^i\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p \right\rangle=(du^i)_p\left(a^i\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p=(a^i)_p$$

を対応させるものでしたね．それと同じように，(20)を点pで考えたものは，$V_p \times V_p$（直積）のRへの双線形写像で，$\left(\left(a^i\dfrac{\partial}{\partial u^i}\right)_p, \left(b^j\dfrac{\partial}{\partial u^j}\right)_p\right)$を$g_{ij}a^ib^j$へ写すものと考えるのです．ここで，$u^i=u^i(t)$ $(i=1, 2)$できまる曲線の接線ベクトルを考えて$a^i=\dfrac{du^i}{dt}$, $b^j=\dfrac{du^j}{dt}$とおくと$g_{ij}\dfrac{du^i}{dt}\dfrac{du^j}{dt}$となるのです．

実数体への双線形写像 bilinear mapping とは，$\varphi: x \times y \to a$ において，xについてもyについても線形であるものをいう．

Q．なかなか大掛りなものですね．それにしても，今回のお話しは定義だけだったように思いますが．

A．その通りです．それも大分駈け足のところもあって，本当はファイバー・バンドルといったこともお話しした方がよいのですが，それでは，ますます入り込んだことになるのです．次回は，今回のことをもとにして微分形式の計算法などをお話ししましょう．

第3章 微分形式の計算

これまで，局所的に座標が与えられた多様体の上での1次微分式や，さらに高階の微分形式については，その定義を，接空間，双対接空間を考えることによって，精密に述べてきた．今回は，これらについての基本的な計算法を解説していくことにしよう．

1. 微分形式の外微分

n 次元の多様体 M で，点の座標が $(x_1, \cdots, x_n)$ で与えられていると，r 階の微分形式(詳しくは，外微分形式)は，

$$\omega = \frac{1}{r!}\sum_{i_1, \cdots, i_r} a_{i_1 \cdots i_r}(x_1, \cdots, x_n)dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r} \qquad (1)$$

で与えられる．ここで，$i_1, \cdots, i_r$ は，$1, 2, \cdots, n$ の中の任意の数とし，右辺の和は，$i_1=1, 2, \cdots, n, \cdots, i_r=1, 2, \cdots, n$ のすべての場合，つまり n^r 個の項の和であるとし，$a_{i_1 \cdots i_r}=a_{i_1 \cdots i_r}(x_1, \cdots, x_n)$ は添数 $i_1, \cdots, i_r$ について交代的 (alternating) とする．ここで，交代的というのは，$a_{i_1 \cdots i_r}$ において，$i_1, \cdots, i_r$ の中のどの2つを入れかえても，絶対値は同じで，符号が反対になることである．したがって，$i_1, \cdots, i_r$ の中に同じ数があれば，$a_{i_1 \cdots i_r}=0$ となり，(1) は

$$\omega = \sum_{(i_1, \cdots, i_r)} a_{i_1 \cdots i_r}(x_1, \cdots, x_n)dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r}$$

ここで，右辺の和は，$1, 2, \cdots, n$ から r 個とったすべての組合わせについて作るものとする．$a_{i_1 \cdots i_r}$ は r 階の交代テンソル場の成分であるといってもよい．

2つの微分形式については，ふつうの計算法の他に，次のことが成り立つ．

> ω_1 が r 階，ω_2 が s 階の微分形式のとき，
>
> $$\omega_1\wedge\omega_2=(-1)^{rs}\omega_2\wedge\omega_1$$

r, s の一方が偶数のとき，
$\omega_1\wedge\omega_2=\omega_2\wedge\omega_1$

証明．一般に，$dx_i\wedge dx_j=-dx_j\wedge dx_i$ であるから，

$$(dx_1\wedge\cdots\wedge dx_r)\wedge dy=(-1)^r dy\wedge(dx_1\wedge\cdots\wedge dx_r)$$

このことを繰返し使って，

$$\begin{aligned}&(dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r})\wedge(dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_s})\\&\quad=(-1)^{rs}(dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_s})\wedge(dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r})\end{aligned}$$

したがって，ω_1, ω_2 それぞれ (1) のような形に書いて考えれば，上の公式が作られる．

(1) の ω について，その外微分 $d\omega$ は，

$$d\omega = \frac{1}{r!}\sum_{i_1, \cdots, i_r} da_{i_1 \cdots i_r}\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r} \qquad (2)$$

によって定義される．これについて，次の計算法則が成り立つ．なお，この定義 (2) が，座標系 $x_1, \cdots, x_n$ のとり方に無関係であることは，あとから示すことにする．まず，次の計算法則が成り立つ．

(i) ω_1, ω_2 が同じ階数の微分形式のとき，

$$d(\omega_1+\omega_2)=d\omega_1+d\omega_2$$

(ii) f が関数，ω が微分形式のとき，

$$d(f\omega)=df\wedge\omega+fd\omega$$

(iii) f が関数のとき，

$$d(df)=0$$

(ii) で $f=c$ (定数) とおくと，
$d(c\omega)=cd\omega$
(i) と合せて d は線形作用素となる．

証明．(i)は定義から明らかである．(ii)では，ω を (1) の形にとると，

$$d(f\omega)=d\left(\frac{1}{r!}\sum_{i_1,\cdots,i_r} fa_{i_1\cdots i_r}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r}\right)$$

$$=\frac{1}{r!}\sum_{i_1,\cdots,i_r} d(fa_{i_1\cdots i_r})\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r}$$

ここで，

$$d(fa_{i_1\cdots i_r})=df\cdot a_{i_1\cdots i_r}+fda_{i_1\cdots i_r}$$

だから，(ii)が成り立つ．

(iii) $$d(df)=d\left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i\right)=\sum_i d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\wedge dx_i$$

$$=\sum_i\left(\sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}dx_j\right)\wedge dx_i=\sum_{i,j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}dx_j\wedge dx_i$$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$ だから，

$$d(df)=0$$

関数はすべて C^∞ 級として考えている．

続いて，次のことが成り立つ．

(iv) ω_1, ω_2 が微分形式で，ω_1 が r 階のとき，

$$d(\omega_1\wedge\omega_2)=d\omega_1\wedge\omega_2+(-1)^r\omega_1\wedge d\omega_2$$

(v) ω が微分形式のとき，

$$d(d\omega)=0$$

証明．(iv) ω_1 を (1) の形，ω_2 を $\dfrac{1}{s!}\sum_{j_1,\cdots,j_s} b_{j_1\cdots j_s}dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_s}$ とおいて，(ii) と同じようにして証明できる．ただし，この場合，

$$db_{j_1\cdots j_s}\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r}=(-1)^r dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r}\wedge db_{j_1\cdots j_s}$$

であることを用いる．

(v) ω を (1) にとって計算すると，

$$d(d\omega)=d\left(\frac{1}{r!}\sum_{i_1,\cdots,i_r} da_{i_1\cdots i_r}\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r}\right)$$

$$=\frac{1}{r!}\sum_{i_1,\cdots,i_r} d(da_{i_1\cdots i_r}\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r})$$

一般に (iv), (iii) によって,

$$d(da\wedge dx_1\wedge\cdots\wedge dx_r)=d(da\wedge(dx_1\wedge\cdots\wedge dx_r))$$
$$=d(da)\wedge(dx_1\wedge\cdots\wedge dx_r)-da\wedge d(dx_1\wedge\cdots\wedge dx_r)$$
$$=-da\wedge d(dx_1\wedge\cdots\wedge dx_r)$$

$d(dx_1\wedge\cdots\wedge dx_r)$ も同じように計算して，順に進むと 0 となり，結局

$$d(da\wedge dx_1\wedge\cdots\wedge dx_r)=0 \tag{3}$$

したがって，　$d(d\omega)=0$　　　　(証明終)

ここで前に予告した

$d\omega$ の定義 (2) が座標 $x_1, \cdots, x_n$ のとり方に無関係である　　(*)

ということを確かめておこう．

それは，座標の変換 $x_i=\varphi_i(y_1, \cdots, y_n)$ によって ω が

$$\omega=\frac{1}{r!}\sum_{i_1,\cdots,i_r} b_{i_1\cdots i_r}(y_1,\cdots,y_n)dy_{i_1}\wedge\cdots\wedge dy_{i_r}$$

の形になったとし，ここで，$y_1, \cdots, y_r$ を $x_1, \cdots, x_n$ の関数とみて $d\omega$ を計算する．その場合，(i), (iv), (v)を繰返し使うと，

$$d\omega=\frac{1}{r!}\sum_{i_1,\cdots,i_r} db_{i_1\cdots i_r}\wedge dy_{i_1}\wedge\cdots\wedge dy_{i_r}$$

となることは，上の (3) と同じようなことからわかる．

Q．(*) の証明を，はじめにやらないであとから得られた性質を使って導くあたり，なかなかうまいですね．(2) の定義が well-defined ということですね．

well-defined…
定義が首尾一貫していること．

A．その通りです．

例1．a, b, c が x, y, z の関数のとき，

$$\omega=ady\wedge dz+bdz\wedge dx+cdx\wedge dy$$

については，定義によって，

$$d\omega=da\wedge dy\wedge dz+db\wedge dz\wedge dx+dc\wedge dx\wedge dy$$

ここで，　$da=\frac{\partial a}{\partial x}dx+\frac{\partial a}{\partial y}dy+\frac{\partial a}{\partial z}dz, \cdots$ を代入して整理すると，

$$d\omega=\left(\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial y}+\frac{\partial c}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz$$

とくに，

$$\omega=xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy$$

については，

$$d\omega=3dx\wedge dy\wedge dz \tag{4}$$

例2．

$$\Omega=\frac{xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{5}$$

分子を ω,

$$(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}=r \tag{6}$$

とおくと，　　$\Omega=r^{-2}\omega$

(ii)によると，

$$d\Omega=d(r^{-3})\wedge\omega+r^{-3}d\omega=-3r^{-4}dr\wedge\omega+r^{-3}d\omega \tag{7}$$

(6) によると，

$$dr=r^{-1}(xdx+ydy+zdz)$$

したがって，

$$dr\wedge\omega=r^{-1}(xdx+ydy+zdz)\wedge(xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy)$$
$$=r^{-1}(x^2+y^2+z^2)dx\wedge dy\wedge dz=rdx\wedge dy\wedge dz$$

これと (4) を (7) へ代入して，

$$d\Omega=0$$

Q．ちょっと面白い計算ですね．何か意味がありそうですが．

A．前に，

$$\omega=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} \quad \text{のとき} \quad d\omega=0 \tag{8}$$

ということをやりましたが，これに当ることを3次元で考えているので，実は立体角に関連しているのです．実際，x, y, z を直角座標として，

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta$$

によって球面座標を考えますと，

$$\Omega=\sin\theta\, d\theta\wedge d\varphi \tag{9}$$

となります．一度確かめてごらんなさい．

Q．この式でしたら，見覚えがあります．球面上の図形の面積を求める公式のところで出てきました．あれが立体角でしたね．それからまた，前に (8) について，

この講義の序論参照

$\omega=dz$ となる x, y の関数は，

$$x>0,\quad x<0,\quad y>0,\quad y<0$$

といったそれぞれの領域では存在するが，ω の定義域

$$\{(x,\ y)|\, x^2+y^2\neq 0\}$$

の全般にわたっては存在しない　(10)

ということを学んだことがありますが，Ω についても同じようなことがいえるのでしょうか．

A．これから，そのことをお話しします．

2. 閉じた微分形式と，exact な微分形式

これまで述べてきたように，

$$\Omega=d\omega \quad \text{ならば，} \quad d\Omega=0$$

であるが，逆は (10) で示したように成り立たない．一般に，

$d\Omega=0$ である Ω を閉じた (closed) 微分形式

$\Omega=d\omega$ である Ω を exact な微分形式

という．したがって，exact → closed であるが，逆はいわれないわけである．ところが，局所的には，closed → exact が言える．それは次のようである．

$D=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid a_1<x_1<b_1,\cdots,a_n<x_n<b_n\}$ において，$d\Omega=0$ であれば，$\Omega=d\omega$ となる ω が存在する．

証明．変数 $x_1,\cdots,x_n$ の個数 n についての数学的帰納法によって証明する．まず $n=1$ のときは，$\Omega=f(x_1)dx_1$ の形で，このときはつねに $d\Omega=0$．そして，$\omega=g(x_1)=\int f(x_1)dx_1$ とおくと，$\Omega=d\omega$.

関数は0階の微分形式とみる．

つぎに，変数の個数が $n-1$ のとき正しいとして，n のときを示そう．

まず，c は $a_n<c<b_n$ である定数とし，$x_n=c$ とおくと Ω は $x_1, x_2,\cdots,x_{n-1}$ を変数とする微分形式になる．これを Ω_0 とすると，数学的帰納法の仮定によって，

$$\Omega_0=d\omega_0 \quad (\omega_0 \text{ は } x_1,\cdots,x_{n-1} \text{ についての微分形式})$$

となる ω_0 が存在する．

そこで，Ω を dx_n をふくむ部分とそうでない部分に分けて，

$$\Omega=dx_n\wedge\Omega_1+\Omega_2 \qquad (1)$$

とおく．ここで，Ω_1, Ω_2 は dx_n をふくまない微分形式である(係数には一般に x_n が入っている)．また，求める ω も

$$\omega=dx_n\wedge\omega_1+\omega_2 \quad (\omega_1,\ \omega_2 \text{ は } dx_n \text{ をふくまない})$$

とおいて考える．

たとえば，$i, j=1, 2,\cdots, n-1$ として，
$\omega=\sum_{ij}a_{ij}dx_i\wedge dx_j$
ならば，
$\frac{\partial\omega}{\partial x_n}=\sum_{ij}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_n}dx_i\wedge dx_j$

さて，外微分の計算法則によると，

$$d\omega=-dx_n\wedge d\omega_1+dx_n\wedge\frac{\partial\omega_2}{\partial x_n}+(dx_n \text{ をふくまない式}) \qquad (2)$$

となる．ここで，$\frac{\partial\omega_2}{\partial x_n}$ は ω_2 で係数を x_n で偏微分したものである．

(1) (2) から，

$$\Omega-d\omega=dx_n\wedge\left(\Omega_1+d\omega_1-\frac{\partial\omega_2}{\partial x_n}\right)+(dx_n \text{ をふくまない式})$$

そこで，ω_1 は任意にとって，ω_2 を

$$\frac{\partial\omega_2}{\partial x_n}=\Omega_1+d\omega_1, \quad x_n=c \text{ のとき } \omega_1=\omega_0$$

となるようにきめる．これは積分法によって求められる．

微分形式の各項の係数で考える．

そうすると，$\Omega-d\omega$ は dx_n をふくまない式で，しかも

$$d(\Omega-d\omega)=d\Omega-d(d\omega)=0$$

ところが，一般に，

> 変数が $x_1,\cdots,x_n$ の微分形式で dx_n をふくまないものが閉じていれば，係数にも x_n がふくまれていない

ということが成り立つので，$\Omega-d\omega$ は $x_1,\cdots,x_{n-1}$ についての微分形式である．しかも，$x_n=c$ のとき $\omega_2=\omega_0$ であることから，

$$x_n=c \text{ のとき}, \quad \Omega-d\omega=\Omega_0-d\omega_0=0$$

となって，つねに　$\Omega=d\omega$　(証明終)

たとえば，$\omega=a(x_1, x_2, x_3)dx_1\wedge dx_2$ で $d\omega=0$ ならば，$\frac{\partial a}{\partial x_3}=0$ となって a は x_3 をふくまない．

Q．前に，$\omega=adx+bdy$ (a, b は x, y の関数)について，

$$d\omega=da\wedge dx+db\wedge dy=\left(\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial y}\right)dx\wedge dy=0$$

であれば，$\omega=dz$ となる $z=f(x,y)$ が存在するということを習いましたが，ここでの定理はその拡張になっているのですね．

A．その通りです．40ページ例2ではどうなるか考えてごらんなさい．

Q．これは難かしそうだな．ああ，わかりました．41ページ (9) によれば，$\Omega=\sin\theta\, d\theta\wedge d\varphi=d(-\cos\theta\, d\varphi)$ ですね．

A．しかし，この場合も，Ω は $D=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\neq 0\}$ で定義されているのに，$\Omega=d\omega$ となる ω はこの領域全体にわたっては存在しないのです．

Q．閉じていることと exact なこととの違いは微妙なのですね．

A．そうです．このことをちょっとお話ししておきます．

$\Omega=d\omega$ となる ω が D で存在すれば，球 $x^2+y^2+z^2\leqq 1$ を K として，$\int_K \Omega=\int_{\partial K}\omega=0$ 他方これは立体角で $\int_K \Omega=4\pi$

領域 D の上で定義された n 階の微分形式の全体を考えてこれを F とする．F は加法と定数倍によってベクトル空間になっている．いま，F の中で閉じている微分形式の全体を Z，exact である微分形式の全体を B とすると，

$$F\supset Z\supset B$$

Z は F の部分ベクトル空間，B は Z の部分ベクトル空間になっている．そこで，Z を B によって剰余類に分けて出来るベクトル空間 Z/B が考えられる．これが極めて重要で，この空間の次元は D の位相的構造と密接に関連している．詳しいことはここでは述べないが，例を示しておく．

閉じているものをコサイクル (cocycle) exact なものをコバウンダリ (coboundary) ともいう．

例．41ページの (8) の ω は，$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\neq 0\}$ で閉じているが，exact ではない．また，40ページの (5) の Ω も，$D=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\neq 0\}$ で閉じているが exact でない．これらは，どちらの場合にも D が単一連結でないことと関連している．

Q．これだけでは，あまりわかった気がしませんが，ムードはわかります．

A．今のところでは，この程度で我慢をして下さい．とにかく，微分形式が空間の位相と深い関連があるということを覚えておいて下さい．正確なことはもっと先へ行って位相幾何を学んでからわかることですから．

3. 微分形式と積分

R^n の領域 D で定義された微分形式

$$\omega=a(x_1,\cdots,x_n)dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n \tag{1}$$

があるとき，D での積分を

$$\int_D \omega=\int\cdots\int_D a(x_1,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n \tag{2}$$

によって定義することは，自然である．それは，

$$x_i=\varphi_i(y_1,\cdots,y_n)\quad(i=1,\cdots,n) \tag{3}$$

によって変数を $x_1,\cdots,x_n$ から $y_1,\cdots,y_n$ へ変えるとき，関数行列式を

$$J=\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)}$$

関数行列式 $\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial y_1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial x_1}{\partial y_n} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial y_n}\end{vmatrix}$

とすると，(1) の ω は

$$\pi=a(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)Jdy_1\wedge\cdots\wedge dy_n$$

となる．また，この変換で D が B へ移ったとすると，(2) に当るものとして，

$$\int_B \pi=\int\cdots\int_B a(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)Jdy_1\cdots dy_n \tag{4}$$

ところが，　　　　　$J>0$

である限り (2) (4) の右辺は一致する．したがって，

> 座標系 $x_1, \cdots, x_n$ に対して，$J>0$ である座標系 $y_1, \cdots, y_n$ をどのようにとっても，微分形式 ω に対して考えられる積分 $\int_D \omega$ は同じ値をとる

といえる．

一般に R^n での座標系として，$J \neq 0$ の変換 (3) でたがいに 1 対 1 に移れるものの全体を考えると，これは次の K_1, K_2 の 2 組に分かれる．

> K_1：この中の座標系は，$J>0$ の変換で移れる．
>
> K_2：この中の座標系は，$J>0$ の変換で移れる．
>
> K_1 と K_2 の座標系は $J<0$ の変換で移れる．

そして，R^n に K_1, K_2 のどちらか一方を付随させて考えたとき，この R^n は'方向づけられている'という．したがって，

> 方向づけられた R^n の領域 D では，微分形式 ω に対して $\int_D \omega$ が定まる

といえる．方向づけがちがえば積分の値は符号が変わる．

例．R^2 で，$\omega = a dx \wedge dy$ に対して，座標系 x, y では $\int \omega = \iint a dx dy$

座標系 y, x では $\int \omega = \iint -a dy dx = -\iint a dy dx$

定積分の定義からは，$\iint a dx dy = \iint a dy dx$

積分順序の変更．ここでは，積分の値は変わらない．

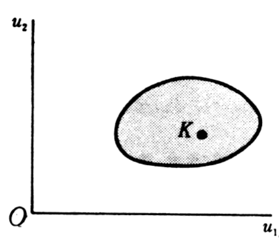
Q．方向づけというのは，2次元ではまわり向きとして直観的ですが，多次元だとこのようにいうのですね．ところで，空間のガウスの定理やストークスの定理での面積分というのは，ここのお話しですとどうなりますか．

A．それをお話ししましょう．

たとえば，3次元の空間での曲面 S は，局所的には，

$$x_i = x_i(u_1, u_2) \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1}$$

で定まる $(u_1, u_2) \to (x_1, x_2, x_3)$ によって，平面上の領域 K が空間の中へ 1 対 1 に写像されたものとして定められる．



そこで，x_1, x_2, x_3 の微分形式

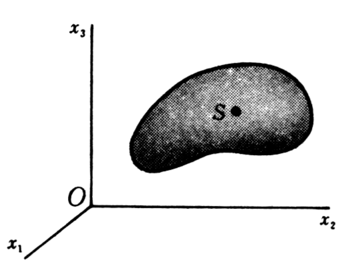
$$\omega = a_1 dx_2 \wedge dx_3 + a_2 dx_3 \wedge dx_1 + a_3 dx_1 \wedge dx_2$$

に対しては，(1) をこれに代入してできる微分形式

$$\pi = b du_1 \wedge du_2$$

によって，

$$\int_K \pi = \iint_K b du_1 du_2$$



を考え，これを $\int_S \omega$ とする．この場合，平面 R^2 における方向づけが与えられていなく

てはならない.

一般に,

$$x_i = x_i(u_1, \cdots, u_k) \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

によって R^k の領域 K が R^n の D へ移されるとき, k 階の微分形式

$$\omega = \sum a_{i_1 \cdots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

の D での積分は, ω を $u_1, \cdots, u_k$ で表わした π によって,

$$\int_D \omega = \int_K \pi$$

で定義される. このとき, R^k での方向づけは $u_1, \cdots, u_k$ で定まるものを使うのである.

Q. これは局所多様体での話ですね.

A. そうです. 一般の多様体は局所多様体の貼りつけでできるものですが, その一般論はまだやってありません. したがって, 一般のストークスの定理

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega \quad (\partial D \text{ は } D \text{ の境界})$$

もまだ証明できる段階にはなっていません. これはこの講義では, ずっとあとでお話しすることになりましょう. もっとも, 2次元で ω が1次微分式のときのことは, これからも時々使うでしょうが, これはふつうの微積分でやったことで十分でしょう.

D を R^n の領域としても, ∂D は局所多様体でない.

4. 微分形式と関数値の変化

局所多様体 M で座標を $x_1, \cdots, x_n$ とし, その中で曲線 $x_i = x_i(t)$ $(i=1, \cdots, n)$ を考える. 関数 $f = f(x_1, \cdots, x_n)$ のこの曲線に沿っての値の変化率は,

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{dx_i}{dt} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

となる. この式で, $a_i = \dfrac{dx_i}{dt}$ とおくと, $\sum_i a_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ となるが, これは接空間と双対接空間の関係から,

$$df\left(\sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \left\langle \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i},\ df \right\rangle$$

とかけるものであった. さらに一般に, $a_i, b_i (i=1, \cdots, n)$ を $x_1, \cdots, x_n$ の関数として,

$$X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \omega = \sum_i b_i dx_i$$

については,

$$\omega(X) = \langle X,\ \omega \rangle = \sum_i a_i b_i$$

ξ がベクトル空間 V の元, φ がその双対ベクトル空間 V^* の元とすると, φ は ξ を1つの実数へ写す. その値が $\varphi(\xi) = \langle \xi, \varphi \rangle$

そこで, ω_1, ω_2 が1次微分式のとき, そのテンソル積 $\omega_1 \otimes \omega_2$ を考えて, 2つの1次演算子(接ベクトル場) X_1, X_2 に対して,

$$(\omega_1 \otimes \omega_2)(X_1,\ X_2) = \omega_1(X_1)\omega_2(X_2)$$

による双1次写像 $(X_1,\ X_2) \to R$ を考えることは, 自然である.

ω_1, ω_2 の外積は,

$$\omega_1\wedge\omega_2=\frac{1}{2}(\omega_1\otimes\omega_2-\omega_2\otimes\omega_1)$$

であるから，これによる写像 $(X_1,\ X_2)\to R$ は次のように考えられる．

R は実数の集合．

$$(\omega_1\wedge\omega_2)(X_1,\ X_2)$$

$$=\frac{1}{2}((\omega_1\otimes\omega_2)(X_1,\ X_2)-(\omega_2\otimes\omega_1)(X_1,\ X_2))$$

$$=\frac{1}{2}(\omega_1(X_1)\omega_2(X_2)-\omega_2(X_1)\omega_1(X_2)) \tag{1}$$

さらに，

$$(\sum_{ij}a_{ij}\omega_i\wedge\omega_j)(X_1,\ X_2)=\sum_{ij}a_{ij}(\omega_i\wedge\omega_j)(X_1,\ X_2) \tag{2}$$

と約束する．また，$\pi_1=\sum_i a_i\omega_i$，$\pi_2=\sum_i b_i\omega_i$ とすると，

$$(\pi_1\wedge\pi_2)(X_1,\ X_2)=\frac{1}{2}(\pi_1(X_1)\pi_2(X_2)-\pi_2(X_1)\pi_1(X_2))$$

定義(1)の妥当性を示す．

つぎに，外微分については，次のことが基本となる．

まず，$p_i=p_i(x_1,\cdots,x_n)$，$q_i=q_i(x_1,\cdots,x_n)$ として，

$$X=\sum_i p_i\frac{\partial}{\partial x_i},\quad Y=\sum_i q_i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

を考える．このとき，

$$[X,\ Y]=XY-YX$$

とおくと，計算によって，

$$[X,\ Y]=\sum_i\sum_j\left(p_j\frac{\partial q_i}{\partial x_j}-q_j\frac{\partial p_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{3}$$

となって，これも1次微分式である．このとき，次の等式が成り立つ．

$$d\omega(X,\ Y)=\frac{1}{2}(X\omega(Y)-Y\omega(X)-\omega([X,\ Y]))$$

$X\omega(Y)=X(\omega(Y))$

証明．$\omega=\sum_{i=1}^{n}a_i dx_i$ とおくと，$d\omega=\sum_i da_i\wedge dx_i$

(1)(2)によって，

$$d\omega(X,\ Y)=\frac{1}{2}\sum_i(da_i(X)dx_i(Y)-da_i(Y)dx_i(X))$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{ij}\frac{\partial a_i}{\partial x_j}(p_jq_i-p_iq_j) \tag{4}$$

$$da_i(X)=\sum_j\frac{\partial a_i}{\partial x_j}dx_j(X)=\sum_j\frac{\partial a_i}{\partial x_j}p_j$$

また，$X\omega(Y)-Y\omega(X)$

$$=\sum_j p_j\frac{\partial}{\partial x_j}(\sum_i a_iq_i)-\sum_j q_j\frac{\partial}{\partial x_j}(\sum_i a_ip_i)$$

$$=\sum_{ij}\frac{\partial a_i}{\partial x_j}(p_jq_i-p_iq_j)+\sum_i a_i\sum_j\left(p_j\frac{\partial q_i}{\partial x_j}-q_j\frac{\partial p_i}{\partial x_j}\right) \tag{5}$$

(4)，(5) と (3) によって証明がすむ．

つぎに，

$$[X, Y]=0, \quad \text{つまり} \quad XY=YX$$

のとき，X, Y は可換であるという．たとえば，次の各場合にはそうなっている．

(A) p_i, q_i がすべて定数のとき．

(B) $X=\sum_{i=1}^{k} p_i(x_1, \cdots, x_k)\frac{\partial}{\partial x_i}$, $\quad Y=\sum_{j=k+1}^{n} q_j(x_{k+1}, \cdots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_j}$ のとき．

そして，上の定理から，

$$X, Y \text{ が可換のとき} \quad d\omega(X, Y)=\frac{1}{2}(X\omega(Y)-Y\omega(X))$$

Q．この定理はどんな応用があるのですか．

A．応用は広いので，あとから出てきます．そのときまでの楽しみにしておいて下さい．

Q．大分いろいろの計算を学びましたので，少し応用を示して下さいませんか．

A．それはもっともです．あと，完全積分可能性についてのフロベニウスの定理とか，積分についてのストークスの定理のことは残っていますが，次回から暫く幾何学や変分法への応用をお話しすることにします．

練 習 問 題

1. 次の各場合に，$dx\wedge dy$ を計算せよ．
   (1) $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$
   (2) $x=u+v$, $y=uv$

2. 次の各場合に $dx\wedge dy\wedge dz$ を計算せよ．
   (1) $x=r\sin\theta\cos\varphi$, $y=r\sin\theta\sin\varphi$, $z=r\cos\theta$
   (2) $x+y+z=u$, $y+z=uv$, $z=uvw$

3. 次の各場合に $d\omega$ を求めよ．
   (1) $\omega=ydx-xdy$ (2) $\omega=(x^2-2xy)dx+(y-x^2)dy$
   (3) $\omega=yzdx+zxdy+xydz$
   (4) $\omega=x^2dy\wedge dz+y^2dz\wedge dx+z^2dx\wedge dy$

4. $\omega=\dfrac{ydx-xdy}{(x+y)^n}$ のとき，$d\omega=0$ となるように定数 n を定め，その場合 $\omega=dz$ となる z を求めよ．

5. $\omega=r^n(xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy)$ $(r=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}})$ のとき，$d\omega=0$ となる定数 n を求めよ．

6. $\omega_1=dx_1\cos\theta+dx_2\sin\theta$, $\omega_2=-dx_1\sin\theta+dx_2\cos\theta$, $\omega_3=d\theta$ のとき，$d\omega_1$, $d\omega_2$, $d\omega_3$ を ω_1, ω_2, ω_3 で表わせ．

7. $X_1=x_2\frac{\partial}{\partial x_3}-x_3\frac{\partial}{\partial x_2}$, $X_2=x_3\frac{\partial}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial}{\partial x_3}$, $X_3=x_1\frac{\partial}{\partial x_2}-x_2\frac{\partial}{\partial x_1}$ のとき $[X_2, X_3]$, $[X_3, X_1]$, $[X_1, X_2]$ を求めよ．

8. $d\omega_1=\omega_2\wedge\omega_3$, $[X, Y]=0$ のとき，前ページの定理からどんな等式が導かれるか．

答

1. (1) $rdr\wedge d\theta$　　(2) $(u-v)du\wedge dv$
2. (1) $r^2\sin\theta\, dr\wedge d\theta\wedge d\varphi$　　(2) $u^2v\, du\wedge dv\wedge dw$
3. (1) $-2dx\wedge dy$　　(2) 0　　(3) 0

   (4) $2(x++y+z)dx\wedge dy\wedge dz$
4. $n=2,\quad z=\dfrac{1}{2}\dfrac{x-y}{x+y}+c$
5. $n=-3$
6. $d\omega_1=\omega_3\wedge\omega_2,\quad d\omega_2=-\omega_3\wedge\omega_1,\quad d\omega_3=0$
7. $[X_2,\ X_3]=-X_1,\quad [X_3,\ X_1]=-X_2,\quad [X_1,\ X_2]=-X_3$
8. $X(\omega_1(Y))-Y(\omega_1(X))=\omega_2(X)\omega_3(Y)-\omega_3(X)\omega_2(Y)$

第4章 動座標系の方法(1)

これまで，微分形式の基本的事項について述べてきたが，これから数回にわたって，これを利用して動座標系の方法による図形の研究を行なってみよう．もともと，動座標系による幾何学の研究は，チェザロ，ダルブーらによって進められたものであるが，これをクラインによる群論と幾何学の関連の見地から，連続群論(リー群論)の図形による表現として基本的な追究を行なったのは，エリー・カルタンで，そこでの計算はすべて微分形式による．ここでは，ユークリッド平面やユークリッド空間について述べるが，その多くは，他の等質空間や一般の等質空間においても，同じような方法で扱うことのできるものである．

チェザロ
(E. Cesaro 1859-1906)
ダルブー
(G. Darboux 1847-1912)
クライン
(F. Klein 1849-1925)
エリー・カルタン
(E. Cartan 1869-1951)

なお，動座標系というのは，repère mobile (moving frame) の訳で，動標構，動枠などともいわれているが，ここでは親しみやすい言葉を使って座標系ということにする．

また，これからの話の理解には，微分形式の外積と外微分の計算法だけ知っていればよいのであって，その理論的構成の基礎に立戻る必要はない．

1. 相対変位

平面上で直角座標軸をとって考えると，表向きの移動は，

$$x_1' = x_1\cos\theta - x_2\sin\theta + a_1, \quad x_2' = x_1\sin\theta + x_2\cos\theta + a_2 \tag{1}$$

によって点 (x_1, x_2) を点 (x_1', x_2') へ移す写像として表わされる．この移動によって原点 $(0, 0)$ および基本ベクトル $(1, 0)$, $(0, 1)$ はそれぞれ

物理学では，移動のことを変位 (displacement) という．これもよい用語であるから，ここでも併用する．

$$A = (a_1, a_2), \quad e_1 = (\cos\theta, \sin\theta), \quad e_2 = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

へ移る．この点 A と，2つの直交する単位ベクトル e_1, e_2 からできる組 A, e_1, e_2 を座標系 (frame) と呼んで，

$$R = \begin{pmatrix} A \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

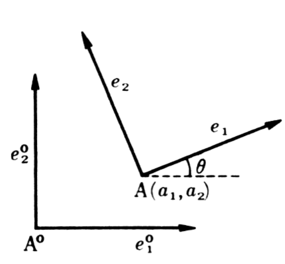


図 1

というように3行1列の行列で表わすことにする．いま，$A^0 = (0, 0)$, $e_1{}^0 = (1, 0)$, $e_2{}^0 = (0, 1)$ とおくと，

$$\begin{pmatrix} A \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ e_1{}^0 \\ e_2{}^0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

基本の座標系 $A^0, e_1{}^0, e_2{}^0$ を R_0, また，

$$P=P(a_1,a_2,\theta)=\begin{pmatrix}1 & a_1 & a_2\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \qquad (3)$$

とおくと，(2) は

$$R=PR_0 \qquad (4)$$

PR_0 で P はふつうの行列，R_0 はベクトルを要素にもつ行列であるが，計算はふつうの方法によるわけである．

と表わされる．P は移動 (1) を表わす行列といってよい．

いま，もう1つの移動があって，それを表わす行列を Q とし，これによって R_0 が R' へ移るとすると，

$$R'=QR_0 \qquad (5)$$

R' を R で表わすのには，(4) から

$$R_0=P^{-1}R$$

とし，これを (5) に代入して，

$$R'=(QP^{-1})R \qquad (6)$$

QP^{-1} も移動を表わす行列で，この移動を R' の R に対する相対変位という．このとき，

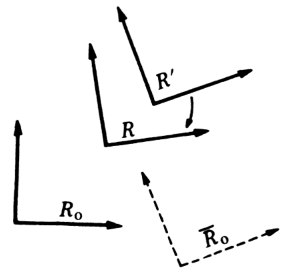


図 2

相対変位 (relative displacement)

相対変位は，基本の座標系 R_0 のとり方に無関係である．

ことが，次のようにしてわかる．

R_0 の代わりに，別の基本の座標系 $\bar{R}_0$ をとって，$R=\bar{P}\bar{R}_0$, $R'=\bar{Q}\bar{R}_0$ とする．$\bar{R}_0=CR_0$ とおくと，$R=\bar{P}CR_0$ によって $P=\bar{P}C$, 同様に $Q=\bar{Q}C$ となって，

$$QP^{-1}=(\bar{Q}C)(\bar{P}C)^{-1}=\bar{Q}CC^{-1}\bar{P}^{-1}=\bar{Q}\bar{P}^{-1}.$$

C も (3) の形をした行列で，$C=P(c_1,c_2,\alpha)$

上のことから，また，次のこともいえる．

相対変位は，移動によって変わらない．

それは，$R=PR_0$, $R'=QR_0$ に同じ移動 C を施こしたものがそれぞれ $\bar{R}=PCR_0$, $\bar{R}'=QCR_0$ で，$\bar{R}'$ の $\bar{R}$ に対する相対変位は上の計算から QP^{-1} に等しいからである．

$R=PR_0$ に移動 C をほどこしたものは CR でなくて PCR_0 である．

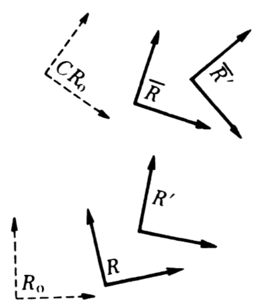


図 3

Q．相対変位に対して，絶対変位というものもあるのですか．

A．それは，$R=PR_0$, $R'=QR_0$ について，$P^{-1}Q$ を R' の R に対する絶対変位といいます．これは，変位 $P^{-1}Q$ によって $R=PR_0$ が $P(P^{-1}Q)R_0=QR_0=R'$ へ移るということを意味します．

2. 相対成分

一般の移動は θ, a_1, a_2 と3つのパラメーター(径数)をもっている．そこで，これからパラメーターの数が3, 2, 1の場合にわたって通用する基本概念をのべる．いま，これらのパラメーターについて θ, a_1, a_2 が C^1 級の関数であるとする．そして，これらの $P(a_1,a_2,\theta)$ について，

C^1 級とは，1階の導関数があって連続のことをいう．

$$R=PR_0$$

という動座標系 R の全体を考える．また，今後 a_1, a_2 の代わりに改めて x_1, x_2 とかくことにする．つまり，

$$P=\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{5}$$

そこで，$R+\Delta R=(P+\Delta P)R_0$ の $R=PR_0$ に対する相対変位を考えると，

$$(P+\Delta P)P^{-1}=E+\Delta P\cdot P^{-1} \qquad (E \text{ は単位行列})$$

したがって，P の変化 ΔP に対する相対変位行列の変化は ΔPP^{-1} である．いま，

$$\Omega=dP\cdot P^{-1} \tag{6}$$

Ω は1次微分式を要素とする行列

とおくと，$\Delta R=\Delta P\cdot P^{-1}R$ であることから，

$$dR=\Omega R \tag{7}$$

(5) (6) によると，

$$\Omega=\begin{pmatrix} 0 & dx_1 & dx_2 \\ 0 & -\sin\theta d\theta & \cos\theta d\theta \\ 0 & -\cos\theta d\theta & -\sin\theta d\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

* のところは計算の結果に関係がないので省略．

そこで，

$$\begin{cases} \omega_1= \ \ dx_1\cos\theta+dx_2\sin\theta \\ \omega_2=-dx_1\sin\theta+dx_2\cos\theta \\ \omega_{12}= \ \ d\theta \end{cases} \tag{8}$$

とおくと，

$$\Omega=\begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ 0 & 0 & \omega_{12} \\ 0 & -\omega_{12} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{また} \quad R=\begin{pmatrix} A \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

これを使って (7) を書下すと，

$$\begin{cases} dA=\omega_1 e_1+\omega_2 e_2 \\ de_1= \qquad \omega_{12}e_2 \\ de_2=-\omega_{12}e_1 \end{cases} \tag{9}$$

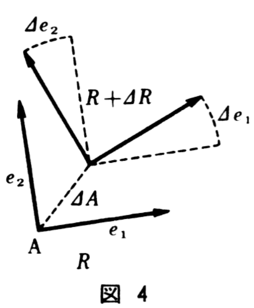


図 4

Ω の成分 $\omega_1, \omega_2, \omega_{12}, -\omega_{12}$ をこれらの動座標系の集まりの相対成分という．前ページで述べたように，相対変位は基本の座標系 R_0 のとり方に無関係であり，移動に対して不変であったから，相対成分についても次のことがいえる．

> 相対成分は基本の座標系のとり方に無関係である．
> また，移動によって変わらない．

相対成分は，最も基本的なものである．次に特別な場合にこれを考える．

例 1 P が原点のまわりの回転を表わすときは，

(5) で $\qquad x_1=0, \quad x_2=0$

で，(8) から， $\qquad \omega_1=0, \quad \omega_2=0$

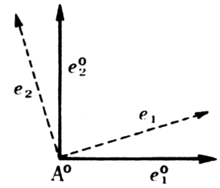


図 5

つまり，原点を固定した R の集まりについては，ω_1,

ω_2 が 0 となる．

例2　P が $e_1{}^0$ 方向の平行移動のときは，(5) で，

$$x_2=0,\quad \theta=0$$

したがって，(8) から，

$$\omega_2=0,\quad \omega_{12}=0$$

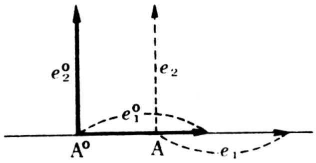


図 6

つまり，A, e_1 がこの直線上にある R の集まりについては，ω_2, ω_{12} が 0 となる．

次に，相対成分を利用していくのに当って，最も基本となる公式を求めておこう．いま，$R=PR_0$ に対して，相対変位行列が U で与えられた座標系

$$\bar{R}=UR$$

を考える．ここに，

$$U=\begin{pmatrix} 1 & u_1 & u_2 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad (10)$$

とし，U は一定とは限らないで一般には変化するものとする．

変化のパラメーター個数は 0, 1, 2, 3 のどれでもよい．

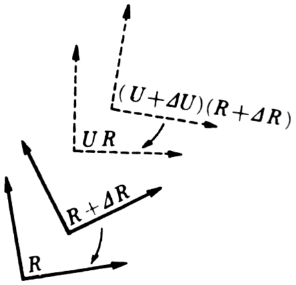


図 7

$R=PR_0$ だから，

$$\bar{R}=UPR_0$$

そこで，$\bar{R}$ の集まりについて相対成分行列を $\bar{\Omega}$ とかくと，(6) により，

$$\begin{aligned}\bar{\Omega}&=d(UP)(UP)^{-1}\\ &=(UdP+dUP)(P^{-1}U^{-1})=U(dPP^{-1})U^{-1}+dUU^{-1}\end{aligned}$$

こうして得られたことをまとめると，

> 座標系 R の集まりに対する相対成分の行列を Ω，$\bar{R}=UR$ の集まりに対する相対成分の行列を $\bar{\Omega}$ とすると，
>
> $$\bar{\Omega}=U\Omega U^{-1}+dUU^{-1} \qquad (11)$$

例1　U が R の原点 A を固定し，そのまわりにまわる回転を表わすときは，(10) で $u_1=0$, $u_2=0$ となり，

$$U=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},\qquad dUU^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d\alpha \\ 0 & -d\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

また，

$$\bar{\Omega}=\begin{pmatrix} 0 & \bar{\omega}_1 & \bar{\omega}_2 \\ 0 & 0 & \bar{\omega}_{12} \\ 0 & -\bar{\omega}_{12} & 0 \end{pmatrix},\qquad \Omega=\begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ 0 & 0 & \omega_{12} \\ 0 & -\omega_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

したがって (11) によって計算すると，次の結果が得られる．

U が原点のまわりの角 α の回転のとき，

$$\left.\begin{aligned}&\bar{\omega}_1=\omega_1\cos\alpha+\omega_2\sin\alpha,\qquad \bar{\omega}_2=-\omega_1\sin\alpha+\omega_2\cos\alpha\\ &\bar{\omega}_{12}=\omega_{12}+d\alpha\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

例2 U が e_1 軸の方向の平行移動で，移動距離が t のときは，(10) で $u_1=t$, $u_2=0$, $\alpha=0$ となり，

$$U=\begin{pmatrix}1 & t & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\qquad dUU^{-1}=\begin{pmatrix}0 & dt & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\Omega, \bar{\Omega}$ は例1と同じにして (11) を計算すると，次の結果が得られる．

U が e_1 軸方向の距離 t の平行移動のとき，

$$\bar{\omega}_1=\omega_1+dt,\quad \bar{\omega}_2=\omega_2+t\omega_{12},\quad \bar{\omega}_{12}=\omega_{12} \tag{13}$$

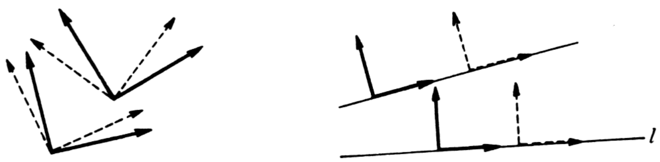


図 8

Q．今までのところでは，一体何をやろうとしているのかよくわかりませんが，とにかく (12) や (13) があとから要るのですね．

A．そうです．(12) では ω_1, ω_2 の変換が1次変換，(13) では ω_2, ω_{12} の変換が1次変換であることに注目しておいて下さい．

3. 等質空間

いま，点Aを原点にもつ1つの座標系を R とすると，Aを原点とする任意の座標系は，原点のまわりの回転を表わす行列 U によって，UR とかける．さらに，$R=PR_0$ とすると，

$$UR=UPR_0$$

そこで，このような座標系の全体 $\{UPR_0\}$ を点Aに対応させて考える．

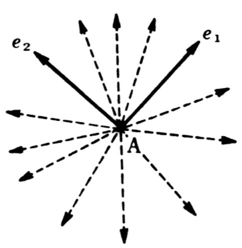


図 9

平面上の表向きの移動の全体は「群」になっている．これを G として変位の行列で表わして考える．原点のまわりの回転の全体のつくる群を H とすると，これは上に示した U の全体として表わされる．そこで，

$$点\ \mathrm{A} \longleftrightarrow \{UPR_0\} \longleftrightarrow HP$$

という対応を考える．ここに，HP は回転の行列 U に P をかけたものの全体である．$\{UPR_0\}$ に移動を行なうことは，R_0 のところへ QR_0 (Q も変位行列) を代入して $\{UPQR_0\}$ とすることで，HP でいえば HPQ とすることになる．

したがって，点Aや $\{UPR_0\}$ は，表向きの移動の群 G を回転の群で左剰余に分類してできる剰余類 HP と同等とみられ，移動 Q を行なうことは HP を HPQ にすることである．

一般に群 G を部分群 H で左剰余類 HP (または右剰余類 PH) に分けてできる剰余類の集合 (剰余系) を G/H とかき，これに G の元を右(左)からかけることによって G/H のそれ自身の上への変換を考えるとき，この $M=G/H$ を G を基本の群とする等質空間という．

こうして，ユークリッド平面上の点全体は，表向きの移動全体のつくる群 G

一般に，集合 M に働らく変換の集まり G が群 (group) をなすというのは次の成り立つことである．
- 任意の $a\in G$ に対し共通の e があって $ea=ae=a$
- $a\in G$ ならば $a^{-1}\in G$
- $a, b\in G$ ならば $ab\in G$
変換では $(ab)c=a(bc)$ はつねに成り立っている．

等質空間
(homogeneous space)

を，1点のまわりの回転の群 H で剰余類に分けて作った等質空間と考えられる．

また，平面上の向きのついた直線には，その上に A と e_1 をおく座標系の全体を対応させて考える．U を e_1 軸の方向の平行移動，H をその全体とすると，



図 10

$$\text{有向直線} \longleftrightarrow \{UPR_0\} \longleftrightarrow HP$$

となって，有向直線の全体は表向きの移動の群 G を平行移動の群 H で剰余類に分けてできる等質空間である．

Q．今までユークリッド平面といえば，もとになるものは点でだけ考えていたのですが，直線をもとにして考えるということもあるのですね．結局，

回転群……点，　一方向の平行移動群……直線

というように対応しているわけだ．

A．その通りです．剰余類のことは覚えていますか．

Q．一度復習してみます．群 G で，部分群を H とし，G の元 P, Q について，

$$P=H_1Q \text{ となる } H_1\in H \text{ がある} \longleftrightarrow P\sim Q$$

によって同値関係～を定義する．これで G を分類してできるのが左剰余類でしたね．$P=QH_1$ ですと右剰余類です．

ところで，点や直線をわざわざこうした複雑なものにして考えるというのは，何か目的があるのでしょう．

A．もちろんそうです．それをこれからやろうというのです．たとえば，実数のことを考えるのにも，これを複素数の特別な場合とみることによって非常に明快になることがありますね．そのように，点をこれを原点にもつ座標系の全体 $\{UR\}$ として扱うことによって，ある種の性質は見透しよくなるのです．こうしたことの発展として，ファイバー束というようなものがあるのです．

点の集合や直線の集合を上の立場から考えてみよう．まず52ページ例1で示したように，原点を固定した座標系 R の集合に対しては，$\omega_1=0$, $\omega_2=0$ である．そして，原点のちがった R へ移るときの ω_1, ω_2 は，各 R の代わりに原点は同じであるが回転している UR を使うと，(12) でわかるように，

$$\bar{\omega}_1=\omega_1\cos\alpha+\omega_2\sin\alpha, \qquad \bar{\omega}_2=-\omega_1\sin\alpha+\omega_2\cos\alpha \tag{14}$$

と1次変換をうける．この ω_1, ω_2 を点の主相対成分という．

主相対成分 (principal relative component)

また，前ページ例2で示したように，1直線上に A と e_1 をおく R の集合に対しては，$\omega_2=0$, $\omega_{12}=0$. そして，ちがった直線上に A と e_1 をおく R の間の ω_2, ω_{12} は，各 R の代わりに e_1 の方向に平行移動したものを使うと，(13) によってわかるように，

$$\bar{\omega}_2=\omega_2+t\omega_{12}, \qquad \bar{\omega}_{12}=\omega_{12} \tag{15}$$

と1次変換をうける．この ω_2, ω_{12} を直線の主相対成分という．

そこで，点の2次元の集合を考えると，(14) によって

$$\bar{\omega}_1\wedge\bar{\omega}_2=\omega_1\wedge\omega_2 \tag{16}$$

だから，$\omega_1\wedge\omega_2$ は点の集合にのみよるもので，各点についてこれを原点とす

る座標系 R のとり方には関係しないものである．

また，50ページで述べたように，

図形全体に同じ移動を施しても相対成分 ω_1, ω_2 は変わらない

のであるから，

$\omega_1 \wedge \omega_2$ は点の集合の測度素片で，移動によって不変

測度素片
(measure element)

といえる．

同じように，直線の２次元集合（２つのパラメーターをもった直線の集合）について，(15) から

$$\bar{\omega}_2 \wedge \bar{\omega}_{12} = \omega_2 \wedge \omega_{12} \tag{17}$$

こうして，

$\omega_2 \wedge \omega_{12}$ は直線の集合の測度素片で，移動によって不変

である．

Q．大分いろいろのことが出てきましたね．このやり方が，ユークリッド平面でなくもっと広く使える方法であろうということが察せられます．ところで点の集合の測度としては，ふつう面積が考えられますが，これと (16) とはどう関連しているのですか．

A．それは，(8) から考えてごらんなさい．

Q．(8) によりますと，

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (dx_1 \cos\theta + dx_2 \sin\theta) \wedge (-dx_1 \sin\theta + dx_2 \cos\theta) = dx_1 \wedge dx_2$$

ああ，これは面積素片ですね．面積のことをもってまわって表わしたものですね．

A．これについてはそうですが，この方法が直線についての測度にも適用されるのです．

Q．この (17) は図でいうとどんなものになるのでしょうか．

A．それは，次回にお話しします．ここでの測度で重要なのは，「移動で不変」ということで，一般にこうした測度をハールの測度といいます．

ハール
(A. Haar 1885-1933)

4. 曲　　線

これまでのことを使って曲線の基礎的なことを調べてみよう．

曲線 c があって，これが基本の座標系 R_0 について，

$$x_1 = x_1(s), \quad x_2 = x_2(s)$$

で与えられているとする．ここに，s は c 上の定点から任意の点へいたる弧の長さ（符号を考える）とする．そこで，c 上の各点 A を原点とする座標系 R を１つずつとって，それらを $R=R(s)$ とする．その相対成分は

$$\omega_1 = p_1(s)ds, \quad \omega_2 = p_2(s)ds, \quad \omega_{12} = p_{12}(s)ds$$

と１変数の微分式である．

いま，各点 A で R を A のまわりに回転して $\bar{R}=UR$（ここに $U=U(s)$）とすると，$\bar{R}$ についての相対成分は (14) により，

$$\bar{\omega}_1 = (p_1 \cos\alpha + p_2 \sin\alpha)ds, \quad \bar{\omega}_2 = (-p_1 \sin\alpha + p_2 \cos\alpha)ds$$

そこで，

$$\bar{\omega}_2 = 0 \quad \text{つまり} \quad p_1 : p_2 = \cos\alpha : \sin\alpha$$

となるように α をきめる．このとき，(9) によると，$dA=\bar{\omega}_1\bar{e}_1$．

いま，$\bar{\omega}_1=\bar{p}_1ds$ とおくと，

$$\frac{dA}{ds}=\bar{p}_1\bar{e}_1,\quad \text{したがって}\quad |\bar{p}_1|=1$$

s は弧の長さだから，$\left|\frac{dA}{ds}\right|=1$

そこで，$\bar{p}_1=1$ となるように $\bar{e}_1$ の向きをきめておく．このようにとった $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ を改めて e_1, e_2 とかき，$\bar{\omega}_{12}=kds$ (k は s の関数) とおくと (9) から，

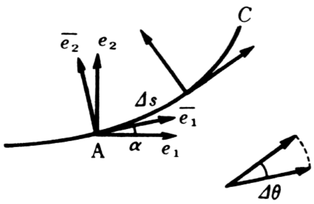


図 11

$$\frac{dA}{ds}=e_1,\quad \frac{de_1}{ds}=ke_2,\quad \frac{de_2}{ds}=-ke_1 \tag{18}$$

これは曲線についてのフルネー・セレーの公式と呼ばれるものである．

フルネー・セレー (Frenet-Serret)

また，k はこの曲線 c の点 A での曲率といわれるもので，曲線に沿って Δs だけ進むときの進行方向の変化の角度を $\Delta\theta$ とすると，

$$\frac{de_1}{ds}=ke_2\quad \text{によって,}\qquad k=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}$$

$|\Delta e_1|\fallingdotseq|k|\Delta s$

Q．この結果は，もっと直接的な方法で学びました．はじめから e_1 を接線単位ベクトルにとれば簡単ですね．

A．そうです．しかし，ここでは座標系の変更による研究方法を示すのが大きな目的なのです．同じような意味で，曲率中心のことをお話ししておきましょう．

(18)の成り立つ座標系 R をフルネーの座標系という．これに対して $U=U(s)$ で表わされる相対変位をもつ $\bar{R}=UR$ を考えると，R と $\bar{R}$ の相対成分の間の関係は (11) で示したように，

$$\bar{\Omega}=U\Omega U^{-1}+dUU^{-1} \tag{19}$$

そこで，曲線 c 上の点 A を定め，一定の U をとって，このときの $\bar{\Omega}$ を $\tilde{\Omega}$ とかくと，

$$\tilde{\Omega}=U\Omega U^{-1} \tag{20}$$

ここで，U は平行移動とする．(18) によると，

$$\Omega=\begin{pmatrix}0 & ds & 0\\ 0 & 0 & kds\\ 0 & -kds & 0\end{pmatrix},\qquad \text{また}\qquad U=\begin{pmatrix}1 & u_1 & u_2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

(20) によると，

$$\tilde{\omega}_1=(1-ku_2)ds,\qquad \tilde{\omega}_2=ku_1ds \tag{21}$$

そこで，A で $k\neq 0$ のときは，$u_1=0,\ u_2=k^{-1}$ にとると，点 A で

$$\tilde{\omega}_1=0,\qquad \tilde{\omega}_2=0$$

これは，上のように U をとると，$\tilde{R}=UR$ の相対成分について $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$ が点 A で 0 となること，つまり，点 A では瞬間的に回転となっていることを示している．このときの $\tilde{R}$ の原点は，

$$Z=A+k^{-1}e_2 \tag{22}$$

これが点 A での曲率中心である．

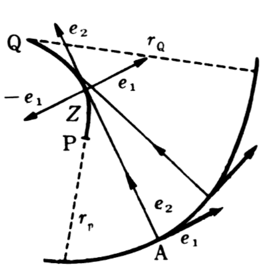


図 12

そこで，各点 A で $U=U(s)$ を

$$U=\begin{pmatrix}1 & 0 & r\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad (r=k^{-1}) \tag{22}$$

と定めて $\bar{R}=UR$ を作ると，その原点は曲率中心 Z で，(19), (21), (22) によって

$$\bar{\omega}_1=0, \qquad \bar{\omega}_2=dr$$

したがって，

$$dZ=dr\,e_2$$

だから，$Z, e_2, -e_1$ できまる座標系 $\bar{R}$ が Z の軌跡（縮閉線）についてはフルネーの座標系であって，r がこの縮閉線の弧の長さになっている．つまり，r が s について増加（または減少）のとき，

曲線 c の各点での曲率中心の軌跡（縮閉線 e）は c の法線の包絡線で，c 上の弧 PQ に対応する e の弧の長さは r_P, r_Q の差に等しい．

r_P, r_Q はそれぞれ P, Q での曲率半径

Q．ここでも，ふつうよく知られたことを，大分まわりくどくやっているようですが，やはり一般論とのつながりを意識しているのですか．

A．そうです．この考えですと，一般の場合にも通用するのです．

次に，平面曲線の基本定理を証明しよう．それは，

曲線 c 上で，定点から任意の点 A への弧の長さを s，A での曲率を k とする．いま，与えられた連続関数 $f(s)$ に対し，$k=f(s)$ となる曲線は必らずあって，位置を問題にしなければ 1 つに限る．

証明．$A=A(s)$, $e_1=e_1(s)$, $e_2=e_2(s)$, $k=f(s)$ として (18) をみたすものがあることを示そう．それには，もっと一般に，α_i, α_{ij} $(i, j=1, 2)$ を s の連続関数，$\alpha_{ij}=-\alpha_{ji}$ として，

$$\frac{dA}{ds}=\sum_{i=1}^{2}\alpha_i e_i, \qquad \frac{de_i}{ds}=\sum_{j=1}^{2}\alpha_{ij}e_j \qquad (i=1, 2) \tag{23}$$

となる 2 次元のベクトル A, e_1, e_2 で単位直交系になるもの，つまり，e_i, e_j の内積について $(e_i, e_j)=\delta_{ij}$ となるもののあることを示せばよい．まず，微分方程式の理論によって，A^0, e_i^0 が与えられたベクトルで，

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$$

$$(e_i^0, e_j^0)=\delta_{ij} \qquad (i, j=1, 2, \cdots, n) \tag{24}$$

となっているとき，

$$s=0 \quad \text{のとき}, \qquad A=A^0,\ e_i=e_i^0 \tag{25}$$

となる (23) の解は必らず 1 つある．いま，この解について，

(23)は 3 つの未知ベクトル A, e_1, e_2 についての微分方程式で，成分について考えれば，6 つの未知関数に関するものである．

$$l_{ij}=(e_i, e_j)-\delta_{ij} \tag{26}$$

とおくと，

$$\frac{dl_{ij}}{ds}=\left(\frac{de_i}{ds},\ e_j\right)+\left(e_i,\ \frac{de_j}{ds}\right)$$

(23) を代入し，(26) によって $(e_i, e_j)=l_{ij}+\delta_{ij}$ を代入して $\alpha_{ij}+\alpha_{ji}=0$ であることを使うと，

$$\frac{dl_{ij}}{ds}=\sum_{k=1}^{2}\alpha_{ik}l_{kj}+\sum_{k=1}^{2}\alpha_{jk}l_{ik}$$

$l_{ij}=0$ はこの微分方程式の解である．

(24) によると $s=0$ のとき，$l_{ij}=0$ だから，微分方程式の解の一意性によって，つねに $l_{ij}=0$ となって，$(e_i, e_j)=\delta_{ij}$.

次に，こうして得られた $A=A(s)$, $e_i=e_i(s)$ に定まった移動を行なうと，

相対成分の不変性によってこれについても(23)が成り立つ．したがって，

$s=0$ のとき， $A=\tilde{A}^0,\ e_i=\tilde{e}_i^0$ (27)

ここに， $(\tilde{e}_i^0, \tilde{e}_j^0)=\delta_{ij}$

という初期条件で(23)を解いて得られる座標系 $\tilde{R}=(\tilde{A}, \tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ を考えると，これは初期条件(25)に対する解 $R=(A, e_1, e_2)$ に，(25)を(27)に移す移動を施したものになっている．これは微分方程式の解の一意性による．(証明終)

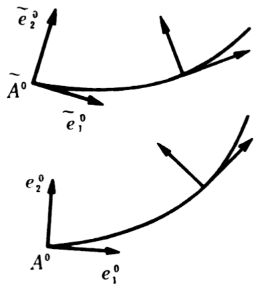


図 13

例1 直線では，曲率 $k=0$，また半径 r の円では，$k=\dfrac{1}{r}$．したがって，上で示した基本定理によると，曲率一定の曲線は，直線または円に限ることがわかる．

例2 $$x_1=\int_0^s \cos u^2 du,\qquad x_2=\int_0^s \sin u^2 du \qquad (28)$$

この線をコルニュー(Cornus)のらせんまたはクロソイド線という．

で表わされる線では，$A=(x_1, x_2)$ から，

$$\frac{dA}{ds}=(\cos s^2,\ \sin s^2)=e_1$$

したがって $e_2=(-\sin s^2,\ \cos s^2)$ で

$$\frac{de_1}{ds}=2se_2$$

となって， $k=2s$

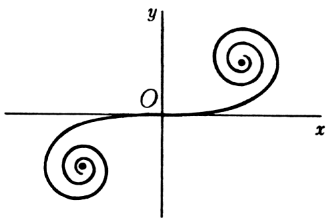
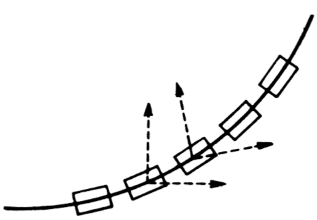


図 14

基本定理によると，この条件をみたす線はすべて(28)に合同なわけである．

Q．この基本定理の証明というのは，曲線のことだけでなく，もっと一般に通用しそうですね．

A．そうです．これは，相対成分がわかれば，座標系がわかるということで，いわば，列車が線路に沿って進むとき，1つの客車から前の客車の動きに注目していれば，外界のことは考えないでも，あとから列車の動き，線路の形がわかるいうことです．こうしたことが動座標系の方法の眼目です．


図 15

練 習 問 題

1. R' の R に対する相対変位の行列が S のとき，R の R' に対する相対変位の行列は何か．

2. R' の R に対する相対変位が，$\bar{R}'$ の $\bar{R}$ に対する相対変位と同じのとき，R, R' に同じ移動を行なうと $\bar{R}, \bar{R}'$ が得られることを示せ．

3. a, b が正の定数のとき，曲線

$$x_1=e^{at}\cos bt,\quad x_2=e^{at}\sin bt \qquad (\text{等角らせん})$$

で原点 $(t=-\infty)$ から媒介変数 t の点までの弧の長さを s，この点での曲率を k とすると，$k=\dfrac{b}{as}$ であることを示せ．また，このことから，基本定理によってどんなことがわかるか．

答とヒント 1. S^{-1} 2. $R=PR_0$ に移動 S を行なうと PSR_0 となることを使う．
3. k が s に反比例する線は等角らせん．ここで，$s=\sqrt{a^2+b^2}\ e^{at}$ となっている．

第5章 動座標系の方法(2)

5．1径数運動

平面上で，図形が1つの径数（パラメーター）t をもった運動をしているとする．これを動座標系の方法によって調べてみよう．まず，図形が1つの位置 F からもう1つの位置 F' へ移ったとすると，この変位は，

(A)　1点のまわりの回転

(B)　平行移動

のどちらか一方だけで実現されることはよく知られている．1径数運動で，2つの位置 F, F' について(A)の場合を考えてその回転の中心を Z_0 とし，F' を F へ近づけるとき，Z_0 が1点Zに限りなく近づくならば，Zをこの運動での F の位置に対する瞬間回転中心という．

複素平面で考えると，表向きの移動は，

$w = e^{i\theta}z + \alpha$

で表わせる．$e^{i\theta}=1$ のときは平行移動．$e^{i\theta}\neq 1$ のときは，不動点 z_0 を使うと，

$w - z_0 = e^{i\theta}(z - z_0)$

となる．

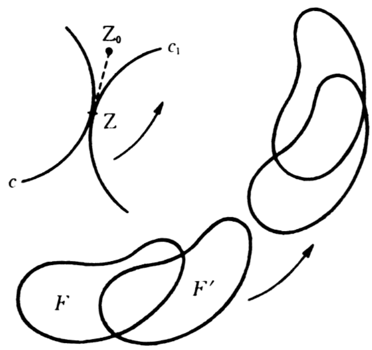


図 1

いま，おのおのの位置 F に対して瞬間回転中心Zを考え，このような点の軌跡としてできる線を c とする．また，各瞬間に図形から見たZの位置を考え，それらの点の軌跡としてできる線を c_1 とする．このとき，次のことがいえる．

もとの運動は，線 c の上を線 c_1 が滑ることなくころがってできる運動になっている．　(1)

ここで，‘滑ることなくころがる’というのは，c, c_1 は接していて，任意の時間の間で接した部分の弧の長さが c, c_1 で同じだということである．

上で考えたのは，Zの軌跡が線 c, c_1 となっている場合であるが，この他に，

1径数の回転

瞬間的平行移動（右の図）

がある．前者は c, c_1 が只1点，後者は c, c_1 のできない場合である．

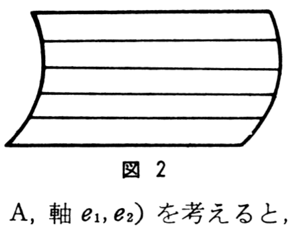


図 2

そこで，(1)を動座標系の方法で証明してみよう．この運動で，図形 F に固定した座標系 R（頂点 A，軸 e_1, e_2）を考えると，これらは t の関数である．はじめの位置を R_0 とすると，

ここのことは，前回詳しく述べた．

P が R_0 に対する R の相対変位を表わす行列

$$R = PR_0$$

くわしくかけば，

$$\begin{pmatrix} A \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ e_1{}^0 \\ e_2{}^0 \end{pmatrix}$$

である．これを瞬間的にとらえると，

$$dR = \Omega R$$

ここに，

$$\Omega = dPP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ 0 & 0 & \omega_{12} \\ 0 & -\omega_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

成分でかくと，
$dA = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2$
$de_1 = \omega_{12} e_2$
$de_2 = -\omega_{12} e_1$
Ω が相対成分の行列

そこでいま，R に対して相対変位が U で表わされる座標系 $\bar{R} = UR$ を考えると，それについては，

$$d\bar{R} = \bar{\Omega}\bar{R}, \quad \bar{\Omega} = U\Omega U^{-1} + dUU^{-1} \qquad (1)$$

いま，位置 F に対して，

$\tilde{\Omega} = U\Omega U^{-1}$ が瞬間的に原点を中心とする回転になっている

ように U を定める．それは，U を定まった変位として，$U(R+\Delta R)$ の UR に対する相対変位

$$U(P+\Delta P)(UP)^{-1} = U(\Delta P \cdot P^{-1})U^{-1}$$

が極限的には回転となることである．それには，次のようにすればよい．

$$\tilde{\Omega} = U\Omega U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\omega}_1 & \tilde{\omega}_2 \\ 0 & 0 & \tilde{\omega}_{12} \\ 0 & -\tilde{\omega}_{12} & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & u_1 & u_2 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

とおくとき，

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\omega}_1 &= (\omega_1 - u_2\omega_{12})\cos\alpha + (\omega_2 + u_1\omega_{12})\sin\alpha = 0 \\ \tilde{\omega}_2 &= -(\omega_1 - u_2\omega_{12})\sin\alpha + (\omega_2 + u_1\omega_{12})\cos\alpha = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

つまり，

$$\omega_1 - u_2\omega_{12} = 0, \quad \omega_2 + u_1\omega_{12} = 0$$

$\omega_1 = a_1(t)dt$,
$\omega_2 = a_2(t)dt$,
$\omega_{12} = a_{12}(t)dt$ の形

となるように u_1, u_2 をきめる．これは $\omega_{12} \neq 0$ である限り可能である．

このようにしてきめた $\bar{R} = UR$ の原点が瞬間回転中心で，この点の軌跡が線 c である．F から見たこの点の位置は，UR_0 の原点で，この点の軌跡が c_1 である．UR_0 の相対成分の行列を，

$$dUU^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \pi_1 & \pi_2 \\ 0 & 0 & \pi_{12} \\ 0 & -\pi_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと，(1) (2) によって，

$$\bar{\omega}_1 = \pi_1, \quad \bar{\omega}_2 = \pi_2 \qquad (3)$$

$\bar{R} = UR$ の原点 $\bar{\mathrm{A}}$ の運動については，

$$\left.\begin{aligned} c \text{ では} \quad & d\bar{\mathrm{A}} = \bar{\omega}_1 e_1 + \bar{\omega}_2 e_2 \\ c_1 \text{ では} \quad & d\bar{\mathrm{A}} = \pi_1 e_1 + \pi_2 e_2 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

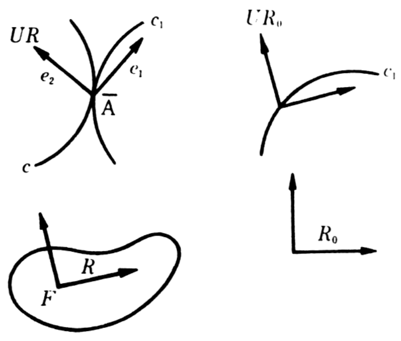


図 3

(3) によって c, c_1 はこの点で接し，接する部分の弧の長さは同じであることがわかる．これで (1) が証明されたことになる．

上の過程で，$\bar{R} = UR$ の原点が一定点であれば，もとの運動が1径数の回転である．また，$\omega_{12} = 0$ の点では瞬間的に平行移動であり，つねに $\omega_{12} = 0$ であれば，運動は瞬間的平行移動となる．

上の証明で定めた $\tilde{\omega}_1 = 0, \tilde{\omega}_2 = 0$ によって，この運動で各点 P が，瞬間回転中心 Z に対し，2点 P, Z を結ぶ直線に垂直な速度ベクトル場を作ることがわかる．

これは (1) を使って確かめることができる．

この運動を Cardan 運動という.

例. 交わる直線 OX, OY の上に両端をおいて動く一定の長さの線分 AB がある. この運動について調べよう.

A は OX 上を動くから, この場合の瞬間回転中心 Z は A を通って OX に垂直な直線上にある. 同じように Z は B を通って OY に垂直な直線上にもある. したがって Z はこの 2 つの垂線の交点として定まる.

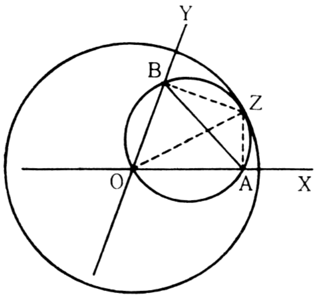


図 4

O, A, B, Z は同一円周上にあって, AB の長さ, ∠XOY の大きさが一定だからこの円の大きさ, したがって OZ の長さは一定である.

Z の軌跡である線 c は O を中心とする円周である. また, ∠AZB の大きさは一定だから AB から見た Z の軌跡 c_1 は AB を弦とする円周である.

こうしてこの運動は円 c に円 c_1 が接しながら滑ることなくころがる運動である.

円の輪転運動

Q. (1) の証明は動座標系の方法を大変有効に使った証明のように思いましたが, それにしても少し道具が大げさではありませんか.

A. 確かに'鶏をさくのに牛刀を用いる'といった感じがしますが, 厳密に証明すればこのようなことになるのだと思います. 昔から, こうしたことは初等幾何学のやり方で説明して, 極限を考えるというのがふつうでした.

Q. それにもう 1 つこのやり方に狙いがあるのではありませんか. 前にも, こうした方法を一般化して, もっと他の場合にも適用するところに動座標の方法の有用性があると伺いました.

A. その通りです. もっとも, この講義ではそうしたことは, どこまでお話しできるかわかりませんが.

6. 面　　積

平面上で, 図形 K の面積を考えるときは, 点の直角座標 (x_1, x_2) を使って,

$$\iint_K dx_1 dx_2$$

を計算すればよいわけであるが, このときの面積素片 $dx_1 \wedge dx_2$ は動座標系の方法によれば, 次のように表わされることは前回に述べたところである.

点 $A(x_1, x_2)$ を原点にもつ座標系 $R = PR_0$ を考え, その相対成分

$$\Omega = dPP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ 0 & 0 & \omega_{12} \\ 0 & -\omega_{12} & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \omega_1 &= \ \ dx_1 \cos\theta + dx_2 \sin\theta \\ \omega_2 &= -dx_1 \sin\theta + dx_2 \cos\theta \\ \omega_{12} &= \ \ d\theta \end{aligned}$$

によると,

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = dx_1 \wedge dx_2$$

ω_1, ω_2 は図形の移動によって変わらないから, $\omega_1 \wedge \omega_2$ も同様である.

いま, 平面上に有界な領域 D があって, これが 1 径数の直線で切ってできた弦で埋められていて, どの 2 つの弦も交わっていないとする. もう少し精密にいうと, D は円を平行な弦で切った図形を 1 対 1 に移したものとする.

このとき, 次のことがいえる.

領域 D が1径数の弦で埋められているとき，弦を PQ，その中点をMとし，PQ の長さを l，M の軌跡としてできる曲線 c の弧の長さの微分を ds，Mでの c の接線が PQ とつくる角を α とすると，D の面積 S は

$$S=\int l\sin\alpha ds \qquad (1)$$

と表わせる．

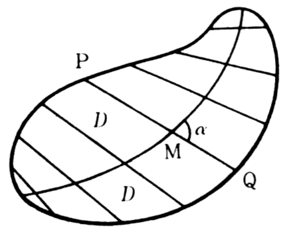
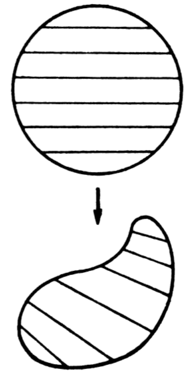


図 5


図 5′

証明．Mを原点とし，PQ 上に e_1 軸をおく動座標系を $R=R(t)$ とし，その相対成分を Ω, e_1 軸方向への平行移動の変位行列を U とすると，

$$\Omega=\begin{pmatrix}0 & \omega_1 & \omega_2\\ 0 & 0 & \omega_{12}\\ 0 & -\omega_{12} & 0\end{pmatrix},\qquad U=\begin{pmatrix}1 & u & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$\bar{R}=UR$ とおくと，60ページ (1) によって

$$\bar{\Omega}=U\Omega U^{-1}+dUU^{-1} \qquad (2)$$

$\bar{\Omega}$ の相対成分を $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}_{12}$ とおくと，(2) から，

$$\bar{\omega}_1=\omega_1+du,\qquad \bar{\omega}_2=\omega_2+u\omega_{12}$$

$\bar{R}$ の原点 $\bar{\mathrm{A}}$ の面積素片は，$\bar{\omega}_1\wedge\bar{\omega}_2$ であるからこれを計算する．このとき $\omega_1=a_1(t)dt$, $\omega_2=a_2(t)dt$, $\omega_{12}=a_{12}(t)dt$ だから，

$$\bar{\omega}_1\wedge\bar{\omega}_2=du\wedge\omega_2+udu\wedge\omega_{12} \qquad (3)$$

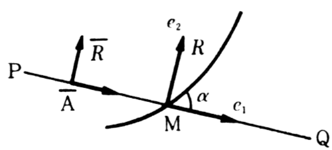


図 6

したがって，

$$S=\iint du\cdot\omega_2+\iint udu\cdot\omega_{12}$$

$$=\int[u]_{u=-\frac{1}{2}l}^{u=\frac{1}{2}l}\omega_2+\int\left[\frac{1}{2}u^2\right]_{u=-\frac{1}{2}l}^{u=\frac{1}{2}l}\omega_{12}=\int l\omega_2$$

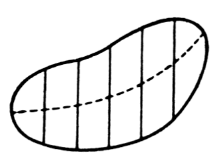
$d\mathrm{M}=\omega_1e_1+\omega_2e_2$ だから，

$$\omega_2=(d\mathrm{M},e_2)=\left(\frac{d\mathrm{M}}{ds},e_2\right)ds=\sin\alpha ds$$

例1　D を平行な弦で切るとき，ω_2 はこの弦に垂直な方向の長さの微分 dx になるから，

$$S=\int ldx$$

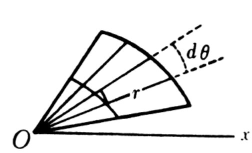
これはよく知られた式である．



例2　極座標での面積の公式

$$S=\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}r^2d\theta$$

も (1) の特別な場合である．ここでは $l=r$, $\sin\alpha\, ds=\frac{1}{2}r\,d\theta$, である．



例3　D が1径数の直線の系に直交する2つの曲線とこの系の2つの直線で囲まれた領域のとき，弦の長さ l は一定である．このとき，弦の中点の軌跡も弦に垂直で，その長さを s とすると，この領域の面積は，

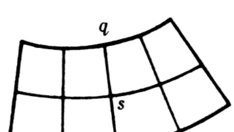


図 7

$$S=ls$$

l の長さが一定であることは，次のようにしてわかる．弦の両端の位置ベクトルを $p=p(t)$，$q=q(t)$ とすると，これらのえがく線は弦に垂直だから，

p, q のえがく曲線は平行であるという．

$$\left(\frac{dp}{dt},\ p-q\right)=0, \qquad \left(\frac{dq}{dt},\ p-q\right)=0$$

したがって，

$$\frac{d}{dt}(p-q,\ p-q)=2\left(\frac{dp}{dt}-\frac{dq}{dt},\ p-q\right)=0$$

となって $l^2=(p-q, p-q)$ は一定である．このことからまた，弦の中点の軌跡が弦に垂直であることがわかる．

Q．公式 (1) はなかなか応用の広いものですね．しかし，ここで，連続性とか微分可能性について少し無頓着なように思いますか．

A．それは，解答を見れば，どれだけのことを使うかわかるので，それをあらかじめ言っておけばよいのですが，いちいち言うのは煩らわしいので省いています．出てくる関数が‘必要なだけ微分可能’とか，C^∞ 級といっておいてもよいのです．もう少し面積のことをお話ししておきましょう．

一定の長さ l の線分 PQ が1径数 t の運動をしてもとの位置へもどったとする．PQ 上の定点に原点，PQ 上に e_1 軸をおく動座標系を $R(t)$，PQ 上の任意の点の座標を (x_1, x_2) とすると，(3) は

$$dx_1\wedge dx_2=du\wedge\omega_2+udu\wedge\omega_{12} \tag{4}$$

とかける．ここで，$\omega_2=a_2(t)dt$，$\omega_{12}=a_{12}(t)dt$ であるが，(u, t) を座標にもつ平面の上で，考える領域を

$$\varDelta: l_1\leqq u\leqq l_2(=l_1+l), \qquad 0\leqq t\leqq t_1$$

とし，(4) の右辺を $a(u, t)du\wedge dt$ で表わし，この線分の通過した部分の面積を，

写像 $(t, u)\to(x_1, x_2)$ で，まわり向きが逆ならば，面積を負に計る．

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u, t)} \text{ の正負に応じて } \iint dx_1dx_2 \text{ を正負に計る}$$

ことによって得られる面積を S とすると，(4) から，

$$S=\int[u]_{l_1}^{l_2}\omega_2+\int\left[\frac{1}{2}u^2\right]_{l_1}^{l_2}\omega_{12}=l\int\omega_2+\frac{1}{2}(l_2{}^2-l_1{}^2)\int\omega_{12} \tag{5}$$

ω_{12} はこの線分が自身のまわりに回転する角の微分だから，線分がこの運動で結局それ自身のまわりに n 回転したとすると，

$$S=l\int\omega_2+n\pi(l_2{}^2-l_1{}^2) \tag{6}$$

次に，$n=0, 1$ の場合を図示する．これらの場合，S は2つの線の囲む面積 S_1, S_2 の差になっている．

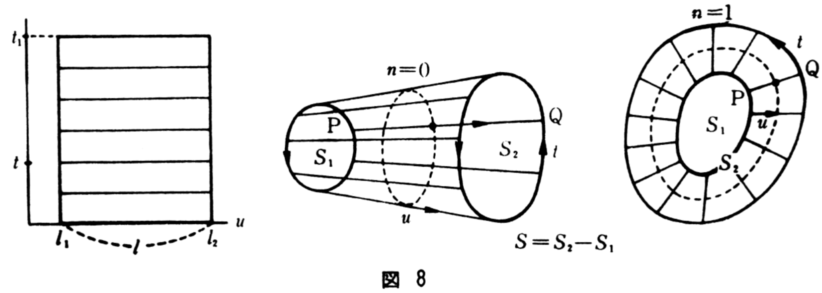


図 8

$n=0$ の場合，S_1 と S_2 の間の部分の面積は，線分の往復で消し合っている．

上の結果の応用例を示そう．

例 1 上の $n=0$ の場合に，左側の閉曲線が1つの線を往復するときは，

$$S_2 = l\int\omega_2$$

これは，面積計の原理となる．面積計は右の図で，Oは固定，棒 OP, PQ はPでちょうつがいになっているとき，Qを面積を求めたい領域の周上を動かす．1周したとき，PQ はそれ自身のまわりをまわってはいないとし，Pは往復運動をしているとする．このとき，$PQ=l$, $\int\omega_2$ は直線 PQ 上の定点が PQ に垂直な方向へ動いた長さ（差引をして）で，これはその点で PQ を軸とする車輪をつくり，その回転によって計ることができる．これで S_2 がわかる．

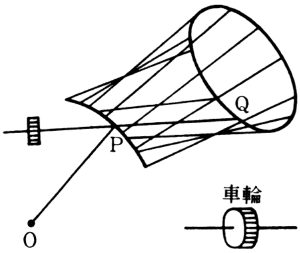


図 9

Amsler の面積計

例 2 線分 A_1A_2 上に定点 A_0 があって，

$$A_0A_1 = a_1, \quad A_0A_2 = a_2$$

とし，運動によって右の図のように3点が閉曲線をえがき，その囲む面積をそれぞれ S_1, S_2, S_0 とする．A_0 を動座標系の原点，e_1 軸を直線 A_1A_2 上にとると，(6) によって，

$$S_2 - S_0 = a_2\int\omega_2 + \pi a_2^2 \qquad (1)$$

$$S_1 - S_0 = -a_1\int\omega_2 + \pi a_1^2 \qquad (2)$$

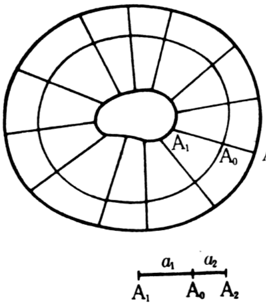


図 10

(1)$\times a_1$+(2)$\times a_2$ を作って，

$$a_1S_2 + a_2S_1 - (a_1+a_2)S_0 = \pi a_1a_2(a_1+a_2)$$

例 3 線分 A_1A_2 上に点 A_0 があって，$A_0A_1=a_1$, $A_0A_2=a_2$ とし，交わる直線 OX_1, OX_2 の上に両端 A_1, A_2 をおきながら線分 A_1A_2 がそれ自身のまわりを1回転してもとの位置へもどると，A_0 は楕円をえがくが，その囲む面積 S_0 は例2と同じような考察によって，

OX_1, OX_2 が垂直な場合のことはよく知られている．

$$S_0 = \pi\cdot a_1a_2$$

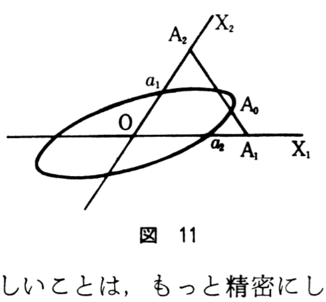


図 11

Q．これで楕円の面積が得られたわけですね．ここの考えですと，OX_1, OX_2 が曲線でも同じ答になるのではありませんか．

A．その通りです．ただ，上の例3でも，その正しいことは，もっと精密にしらべる必要があるのです．

7. 直線の測度

図形の面積は，これを点の集合とみたときその分量を表わす数であり，しかもこれは図形の移動によって変わらないものである．これと同じようなことが直線の集合についても考えられることは，前回にも述べたところである．ここでは，もう少し詳しくこれを調べることにしよう．

直線の集合があるとき，任意の直線を l とし，その上に原点 A, e_1 軸をおく

座標系 $R=PR_0$ を作り，その相対成分行列を $\Omega=dPP^{-1}$，また R を e_1 軸の方向に u だけ平行移動した座標系を $\bar{R}=UR$，その相対成分行列を $\bar{\Omega}$ とすると，

$$\bar{\Omega}=U\Omega U^{-1}+dUU^{-1}$$

この式から，$\bar{\omega}_1=\omega_1+du$

$$\bar{\omega}_2=\omega_2+u\omega_{12},\quad \bar{\omega}_{12}=\omega_{12}$$

したがって，

$$\bar{\omega}_2\wedge\bar{\omega}_{12}=\omega_2\wedge\omega_{12}$$

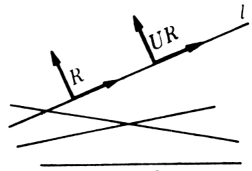


図 12

このことから，$\omega_2\wedge\omega_{12}$ は l 上にとった座標系の位置に関係しないので，直線の集合の測度素片と考えられる．また，相対成分 ω_2，ω_{12} は図形の移動によって変わらないから，この測度素片も移動によって変わらない．以上のことは前回述べたところである．そこで，

直線の集合のハールの測度

$$dG=\omega_2\wedge\omega_{12} \tag{1}$$

を詳しく調べてみよう．もともと，$dR=\Omega R$ ということは，

$$d\mathrm{A}=\omega_1e_1+\omega_2e_2,\quad de_1=\omega_{12}e_2,\quad de_2=-\omega_{12}e_1$$

であることから，Aの座標を (x_1, x_2)，e_1 が基本の座標系の e_1^0 とつくる角を θ とすると，e_1, e_2 の成分はそれぞれ $(\cos\theta, \sin\theta)$，$(-\sin\theta, \cos\theta)$ だから，

$$\left.\begin{aligned}\omega_1&=(d\mathrm{A}, e_1)=\ \ dx_1\cos\theta+dx_2\sin\theta\\ \omega_2&=(d\mathrm{A}, e_2)=-dx_1\sin\theta+dx_2\cos\theta\\ \omega_{12}&=(de_1, e_2)=\ \ d\theta\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

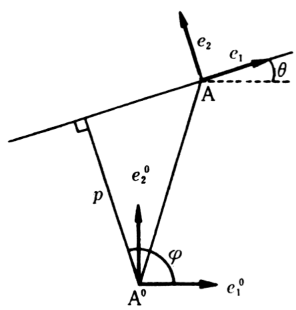


図 13

ここで，基本の座標系の原点 A^0 から，この直線の下した垂線の長さを p，垂線が e_1^0 軸となす角を φ とすると，

$$p=(\mathrm{A}, e_2),\quad \varphi=\theta+\frac{\pi}{2}$$

p の符号はこの式できめる．

(2) によって，

$$dp=(d\mathrm{A}, e_2)+(A, de_2)=\omega_2-(\mathrm{A}, e_1)d\theta$$
$$\omega_{12}=d\theta=d\varphi$$

一般に，A，B が関数ベクトルのとき，
$d(\mathrm{A}, \mathrm{B})$
$=(d\mathrm{A}, \mathrm{B})+(\mathrm{A}, d\mathrm{B})$

だから，(1) によって，

$$dG=dp\wedge d\varphi \tag{3}$$

例． 図のような凸閉曲線に交わる直線全体の測度は，

$$\iint dG=\int_0^{\pi}D(\varphi)d\varphi \tag{4}$$

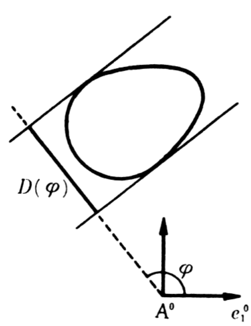


図 14

ここで，$D(\varphi)$ は φ で定まる方向に垂直な2つの平行線でこの図形を夾むときの平行線間の距離（φ 方向の幅）である．

Q．少し面白そうな式が出てきましたね．半径 r の円の場合は $D(\varphi)=2r$ ですから，(4) は $2\pi r$．ああ，これは円周の長さですね．

A．実は，このことが一般に成り立つのです．

Q．それはオドロキですね．是非教えて下さい．

曲線の弧 c があって，その長さは L とする．これに交わる直線全体の測度を考えてみよう．c は C^1 級の曲線とし，一端から任意の点Aへいたる弧の長さを s，Aで s の値の増える向きにひいた接線単位ベクトルを e_1 として，

フルネーの座標系

A, e_1, e_2 で定まる動座標系を $R=R(s)=PR_0$ とすると，

$$dR=\Omega R,$$

$$\Omega=dPP^{-1}=\begin{pmatrix}0 & ds & 0\\ 0 & 0 & kds\\ 0 & -kds & 0\end{pmatrix} \qquad (5)$$

これは，次のようにもかける．

$$dA=ds\,e_1,\quad de_1=kds\,e_2,\quad de_2=-kds\,e_1$$

そこで，Aをとおる直線をlとし，e_1からlの方へまわる角をα，Aを原点としl上に$\bar{e}_1$軸をおく座標系を$\bar{R}=UR$として，

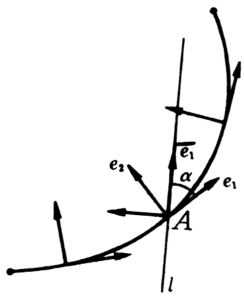


図 15

$$d\bar{R}=\bar{\Omega}\bar{R},\qquad \bar{\Omega}=U\Omega U^{-1}+dUU^{-1} \qquad (6)$$

を考える．ここで，

$$\bar{\Omega}=\begin{pmatrix}0 & \bar{\omega}_1 & \bar{\omega}_2\\ 0 & 0 & \bar{\omega}_{12}\\ 0 & -\bar{\omega}_{12} & 0\end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha\\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} \qquad (7)$$

として (5) (6) (7) によって計算すると，

$$\bar{\omega}_1=ds\cos\alpha,\quad \bar{\omega}_2=-ds\sin\alpha,\quad \bar{\omega}_{12}=kds+d\alpha$$

したがって，直線lの測度素片 $dG=\bar{\omega}_2\wedge\bar{\omega}_{12}$ を求めると，

$$dG=\sin\alpha\,d\alpha\wedge ds \qquad (8)$$

この式から，曲線弧cに交わる直線全体の測度が次のように求められる．

$$\iint dG=\int_0^L\left(\int_0^\pi \sin\alpha\,d\alpha\right)ds$$

$$=\int_0^L[-\cos\alpha]_0^\pi ds=2L$$

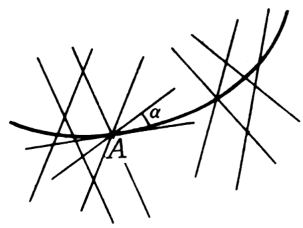
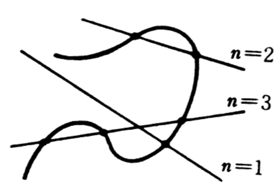


図 16

この場合，弧cに2回以上交わる直線については，各交点で重ねて数えているわけであるから，直線がcと交わる回数をnとすると，上の結果は次のようにかく方がよい．

$$\iint n\,dG=2L$$



とくに，凸閉曲線では $n=2$ だから，

$$\iint dG=L$$

Q．大変きれいな結果ですね．

A．そうです．このことから，周囲L_1の凸閉曲線の中に周囲L_2の凸閉曲線があるとき，外側の曲線に交わる直線が内側の曲線にも交わる確率はL_2/L_1といったことも出てきます．

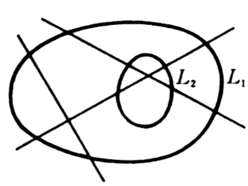


図 17

Q．この場合，直線の測度素片を上のdGにとらなければならないという必然性はどこにあるのですか．

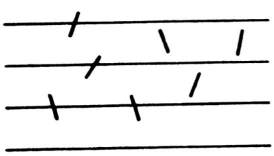
A．それはdGが図形の移動に対して不変というところにあるのです．この性

質をもつ測度は，定数倍を除いて定まることがわかっているのです．証明はそう難しくはありませんから，考えておいて下さい．

8. 位置の測度

図形の位置についてその分量を測る．

平面上で，図形がいろいろの位置を占めるとき，そうした位置の全体について測度を考えることは，応用上大切である．たとえば，



水平面上に一定の間隔 h で平行線がひかれているとき，任意に投げられた長さ $l(<h)$ の針がこの平行線と交わる確率

というような問題では，針の位置の測度が問題となる．

一般に，図形 F がいろいろに置かれているとき，これに固定した座標系 $R=PR_0$ を考え，その相対成分行列 $\Omega=dPP^{-1}$ の要素 $\omega_1, \omega_2, \omega_{12}$ の外積

$$dK=\omega_1\wedge\omega_2\wedge\omega_{12} \qquad (1)$$

を作る．65ページ (2) によると，これは，

$$dK=dx_1\wedge dx_2\wedge d\theta \qquad (2)$$



図 18

となる．これをもとにして図形の位置の測度を計算することにする．相対成分 $\omega_1, \omega_2, \omega_{12}$ は図形の移動で変わらないから，

位置の測度
kinematic measure

(A) dK は図形の集合を移動しても変わらない

といえる．ところがさらに，図形 F に対して固定した別の座標系 $\bar{R}=UR$ を考えると，この場合は U は一定の変位を表わす行列であるから，その相対成分の行列は，

$$\bar{\Omega}=U\Omega U^{-1}$$

となる．ここで，

$$\Omega=\begin{pmatrix}0 & \omega_1 & \omega_2\\ 0 & 0 & \omega_{12}\\ 0 & -\omega_{12} & 0\end{pmatrix},\quad \bar{\Omega}\text{ も同様,}\quad U=\begin{pmatrix}1 & u_1 & u_2\\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha\\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

であることから，

$$\bar{\omega}_1=\ \ (\omega_1-u_2\omega_{12})\cos\alpha+(\omega_2+u_1\omega_{12})\sin\alpha$$
$$\bar{\omega}_2=-(\omega_1-u_2\omega_{12})\sin\alpha+(\omega_2+u_1\omega_{12})\cos\alpha$$
$$\bar{\omega}_{12}=\ \ \omega_{12}$$

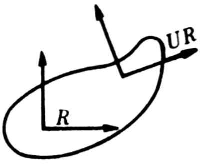


図 19

これから，

$$\bar{\omega}_1\wedge\bar{\omega}_2\wedge\bar{\omega}_{12}=(\omega_1-u_2\omega_{12})\wedge(\omega_2+u_1\omega_{12})\wedge\omega_{12}=\omega_1\wedge\omega_2\wedge\omega_{12} \qquad (3)$$

つまり，次のことがわかった．

(B) dK は，図形 F に固定してとった座標系のとり方に関係しない．

次に，$R=PR_0$ のとき $R_0=P^{-1}R$ として考えると，P^{-1} は R_0 の R に対する相対変位を表わす行列である．この場合の相対成分の行列は，

$$\tilde{\Omega}=d(P^{-1})(P^{-1})^{-1}=d(P^{-1})P.$$

ところが，$P^{-1}P=E$（単位行列）だからその微分をとって，

$$d(P^{-1})P+P^{-1}dP=0$$

したがって，$d(P^{-1})P=-P^{-1}(dPP^{-1})P$ となって，

$$\tilde{\Omega}=-P^{-1}\Omega P$$

このことから，(3) と同じようにして，

$$\tilde{\omega}_1\wedge\tilde{\omega}_2\wedge\tilde{\omega}_{12}=-\omega_1\wedge\omega_2\wedge\omega_{12}.$$

つまり，符号は別にして考えると，

(C) 図形に固定した座標系から平面上に固定した座標系を見るときに考えられる位置の測度は，はじめの図形の集合の位置の測度に等しい．

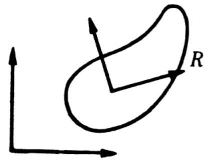


図 20

R_0 から見た R の位置と R から見た R_0 の位置とは，図の上では全くちがっている．R_0 の原点を中心とする円周に沿ってフルネーの座標系をRにとってみよ．R からみた R_0 は原点の まわりに 回転する．

このように，位置の測度については3つの不変性 (A) (B) (C) が成り立つことがわかった．つまり，

(A) 移動による不変性　　(B) 選択による不変性　　(C) 逆不変性

である．

Q．大分深いことがわかりました．はじめにお話しのあった針の問題では，(2) を使って確率を $2l/\pi h$ と求めたことがあります．このときは漫然と (2) を考えたのですが，そんなに根拠の強いものとは知りませんでした．

A．それはもっともです．こうしたことが明確になったのは，この半世紀来のことですから．

Q．実際に針を投げて統計的に $2l/\pi h$ を求め，l, h がわかっていることから π を求めたというお話を伺ったことがあります．そうしますと，(2) は絶対的なものなのでしょうか．

ある実験によると，$2h=45\ mm$，$2l=36\ mm$ として，針を 5000 回落したところ，2532 回だけ平行線と交わったという．ここで，$\dfrac{2532}{5000}=\dfrac{72}{45\pi}$ とおくと，$\pi=3.16$．

A．いやいや，実はユークリッド幾何としての移動で不変な測度は (2) の定数倍しかないというのです．

Q．このことは，ユークリッド幾何の正当性を示すものといえませんか．

A．そうではありません．針を投げる操作がランダムであるといっても，そこに確率分布をきめるメカニズムはあるわけで，この場合の操作がユークリッド幾何学の立場から一様な確率分布に従っていたということでしょう．

練 習 問 題

1. 動座標系について相対成分を $\omega_1, \omega_2, \omega_{12}$ とするとき，この座標系について直角座標が (x_1, x_2) の点が平面上で固定しているための条件を求めよ．
2. 線分 A_1A_2 の上に点 A_0 があって，$A_1A_0=a_1$，$A_2A_0=a_2$ とし，3点 A_1, A_2, A_0 が図のように面積 S_1, S_2, S_0 をかこむように動くとき，S_0 を S_1, S_2 で表わせ．

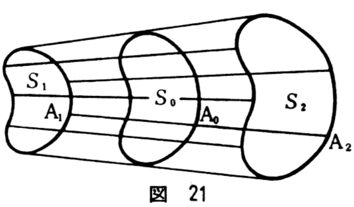


図 21

3. 幅 $D(\varphi)$ が一定値 a に等しい凸閉曲線は円の他にもいろいろある．それらの周はすべて πa であることを示せ．
4. 平面上で光線の集まりを直線の集合とみるとき，曲線形の鏡で反射しても測度は変わらない．なぜか．また，屈折するときはどうか．

答

1. $dx_1+\omega_1-x_2\omega_{12}=0$，$dx_2+\omega_2+x_1\omega_{12}=0$.　2. $(a_1+a_2)S_0=a_2S_1+a_1S_2$
4. 屈折のときは，屈折率の比がかかる．

第6章 動座標系の方法(3)

これまで2回にわたって，ユークリッド平面上のいろいろの問題を，動座標系の方法で処理することを述べてきた．この方法は，有限個のパラメーターをもった連続変換群を基本とする幾何のすべてに通用するものなのである．今回は，3次元の空間の回転，および球面上の幾何をこの方法で扱ってみよう．

1. 空間での回転

3次元のユークリッド空間で原点Oを固定し，2つずつ垂直な3つの単位ベクトル$e_1{}^0, e_2{}^0, e_3{}^0$（単位直交系）を定めて基本とする．これと同じまわり向き（方向づけ）をもった単位直交系をe_1, e_2, e_3とすると，

方向づけ orientation

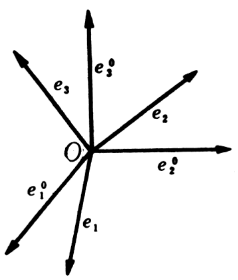


図 1

$$e_i=\sum_{j=1}^{3}p_{ij}e_j{}^0 \qquad (i=1, 2, 3)$$

(p_{ij}) は直交行列，$\det(p_{ij})=1$

$\det(p_{ij})$ とは p_{ij} を要素にもつ行列式

となっている．そこで，

$$R=\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, \quad R_0=\begin{pmatrix} e_1{}^0 \\ e_2{}^0 \\ e_3{}^0 \end{pmatrix}, \quad P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$R=PR_0 \tag{1}$$

Rを座標系（または標構，枠）と呼び，Pを回転の行列ということにする．いま，R_0と同じまわり向きの座標系をもう1つ考え，これを

$$R'=QR_0 \tag{2}$$

とすると，(1)(2)から，

$$R'=QP^{-1}R$$

QP^{-1}をR'のRに対する相対変位という．

相対変位は移動や基本のR_0のとり方に関係しない．

Q．e_1, e_2, e_3のまわり向きというのは，何でしたでしょうか．学んだ覚えはあるのですが．

A．3次元ですと，右手系というのと左手系というのがあります．

Q．そうでした．e_1, e_2の外積$[e_1, e_2]$がe_3に等しいのが右手系，$-e_3$に等しいのが左手系で，右手系では，$[e_2, e_3]=e_1$，$[e_3, e_1]=e_2$となるのでしたね．n次元だとどうなるのですか．

A．基本の単位直交系$e_1{}^0, \cdots, e_n{}^0$をきめてこれをR_0とし，これに対して別の

単位直交系 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ を R として，その成分で作った n 次の行列 (p_{ij}) の行列式が正ならば R_0 と R は同じまわり向きというのです．

Q．そうしますと，右左の系の区別はもうないのですね．

A．そうです．基本の座標系に対して同じまわり向きか，反対かというのです．

Q．そして，基本の座標系のとり方が2つあるのですね．しかし，その2つを区別をする右，左というような絶対的の区別はないというわけですか．

A．その通りです．

次に，$P=(p_{ij})$ は，一般に3つの径数(パラメーター)をもっている．それは，

$$\sum_{j=1}^{3} p_{ij}^2=1 \quad (i=1,2,3), \qquad \sum_{j=1}^{3} p_{ij}p_{kj}=0 \quad (i\neq k)$$

ということからもわかるし，

$$|E+P|\neq 0 \text{ ならば，} P=(E+S)^{-1}(E-S) \quad (S\text{ は逆対称行列})$$

$$S=\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

であることからもわかる．また，

$$M(\theta)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad N(\varphi)=\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと，行列式が正の直交行列は $N(\gamma)M(\beta)N(\alpha)$ の形に書けることからもわかる．そこで，径数の個数が3, 2, 1のどれかの場合を考えて，p_{ij} はそれらの径数について C^1 級（あとからは C^2 級）として話を進めることにする．いま，

α, β, γ をオイラーの角という．

C^k 級とは k 階の導関数が連続のことをいう．

$$R=PR_0$$

という動座標系の全体を考えると，$R+\Delta R=(P+\Delta P)R_0$ の $R=PR_0$ に対する相対変位は，

$$(P+\Delta P)P^{-1}=E+\Delta P\cdot P^{-1}$$

で，$\Delta P\cdot P^{-1}$ が相対変位行列の変化である．そこで，

$$\Omega=dPP^{-1} \tag{3}$$

とおくと，

$$dR=\Omega R \tag{4}$$

行列の微分は各成分の微分を成分とする行列

${}^tP$ は P の転置行列

一般に，

$d(AB)=dA\cdot B+AdB$

ところが，$P\cdot{}^tP=E$ だから，両辺の微分をとって，

$$dP\cdot{}^tP+Pd{}^tP=0, \quad \text{したがって}\quad dP\cdot{}^tP+{}^t(dP\cdot{}^tP)=0$$

${}^tP=P^{-1}$ だから，結局，

$$\Omega+{}^t\Omega=0.$$

このことから，

$$\Omega=\begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{pmatrix} \quad \text{とおくと，}\quad \omega_{ij}+\omega_{ji}=0 \quad (i,\ j=1,2,3)$$

ω_{ij} を相対成分という．これは移動で変わらない．

となって，結局

$$\Omega=dP\cdot P^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & -\omega_{31} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{31} & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

これによると，(4) は次のように書ける．

$$\begin{aligned} de_1 &= \qquad\quad \omega_{12}e_2 - \omega_{31}e_3 \\ de_2 &= -\omega_{12}e_1 \qquad + \omega_{23}e_3 \\ de_3 &= \omega_{31}e_1 - \omega_{23}e_2 \end{aligned} \tag{6}$$

例. 1つの径数 t (時刻) をもった物体の回転運動を考える．このときは，物体に固定した座標系 R を考えると，

$$\omega_{ij} = a_{ij}(t)\,dt \qquad (i,\ j = 1, 2, 3)$$

となっている．そこで，

$$C = \begin{pmatrix} 0 & c_3 & -c_2 \\ -c_3 & 0 & c_1 \\ c_2 & -c_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ここで} \quad a_{23} = -a_{32} = c_1,\quad a_{31} = -a_{13} = c_2,\quad a_{12} = -a_{21} = c_3 \tag{7}$$

とおくと，(6) から

$$\frac{dR}{dt} = CR \tag{8}$$

したがってまた，$\dfrac{d^2R}{dt^2} = \dfrac{dC}{dt}R + C\dfrac{dR}{dt} = \dfrac{dC}{dt}R + CCR$

となって，

$$\frac{d^2R}{dt^2} = \left(\frac{dC}{dt} + C^2\right)R \tag{9}$$

いま，運動する点 M の位置ベクトルを x，その R に関する成分を x_1，x_2，x_3 とし，

$$X = (x_1,\ x_2,\ x_3)$$

とおくと，$x = \sum_i x_i e_i$ によって，

$$x = XR$$

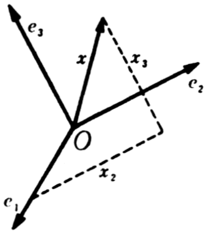


図 2

したがって，点 M の速度，加速度は (8), (9) によって次のように計算される．

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dX}{dt}R + X\frac{dR}{dt} = \left(\frac{dX}{dt} + XC\right)R \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d^2X}{dt^2}R + 2\frac{dX}{dt}\frac{dR}{dt} + X\frac{d^2R}{dt^2} \\ &= \left(\frac{d^2X}{dt^2} + 2\frac{dX}{dt}C + X\left(\frac{dC}{dt} + C^2\right)\right)R \end{aligned} \tag{11}$$

成分を使ってこれらの式を書下すと，速度 $\dfrac{dx}{dt} = v = (v_1,\ v_2,\ v_3)$ が(10)によって次のように表わされる．

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} - x_2c_3 + x_3c_2, \qquad v_2 = \frac{dx_2}{dt} - x_3c_1 + x_1c_3$$

$$v_3 = \frac{dx_3}{dt} - x_1c_2 + x_2c_1$$

ベクトル記号では，$v = \dfrac{dx}{dt} + [c,\ x]$ ここで，$c = (c_1,\ c_2,\ c_3)$

加速度についても同様に計算できる．

Q. このようなことは，力学での相対運動のところで学んだことがあります．もっとも，そこで扱ったのは一様な回転 (C=一定) の場合であったように覚えています．v_1, v_2, v_3 が点 M のほんとうの速度を動座標系 R について示し

た成分で，$\dfrac{dx_1}{dt}$，$\dfrac{dx_2}{dt}$，$\dfrac{dx_3}{dt}$ は見かけの速度の成分ですね．

A．その通りです．こうしたことを，ニュートンの運動方程式を動座標系について考える場合に適用すると，遠心力とか，コリオリの力というものが解釈されるのですが，詳しいことは力学の本で見て下さい．

次に，座標系 R に対して，相対変化が U で与えられる座標系

$$\bar{R}=UR=UPR_0$$

を考えると，$\bar{R}$ の相対成分の行列 $\bar{\Omega}$ については，

$$\bar{\Omega}=U\Omega U^{-1}+dUU^{-1} \tag{12}$$

となっている．それは

$$\bar{\Omega}=d(UP)(UP)^{-1}=(dUP+UdP)P^{-1}U^{-1}=dUU^{-1}+U(dPP^{-1})U^{-1}$$

による．

Q．この辺のことは，平面の幾何でやったのと全く同じですね．

A．その通りです．次のお話も大体同じです．

空間で一点Oを固定した図形の変位で，まわり向きの変わっていないものは，Oを通るある直線を軸とする回転で実現できる．これはよく知られたことである．その軸 (a_1, a_2, a_3) は，R_0 と R に関して

$$a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3=a_1e_1{}^0+a_2e_2{}^0+a_3e_3{}^0$$

という関係にある．行列 $A=(a_1, a_2, a_3)$ を考えると，$AR=AR_0$ で，(1) によると，

$$AP=A \quad したがって \quad A(E-P)=0$$

この式からAが求められる．

となる．

そこで1径数運動を考察する．図形に固定した動座標系の2つの位置 R と R' について回転の軸を考え，R' が R に限りなく近づいたときの軸の極限の位置を考えて，これを瞬間回転軸という．各 R について定めた瞬間回転軸を l とし，その軌跡として空間にできる錐面を c，また，各 R から見た l の位置（相対的の位置）でできる錐面を c_1 とすると，

もとの運動は，原点Oを固定して c_1 を c の上で転がしてできる運動

であることがわかる．証明はユークリッド平面上の場合と全く同じである．

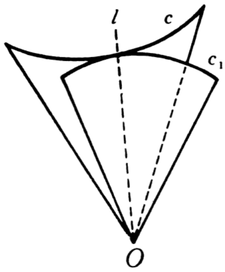


図　3

Q．前には，'滑ることなく転がる' ということでしたが，今回は '滑ることなく' ということはないのですか．

A．いや，やはりあるのですが，その内容がちょっと説明しにくいので省いたわけです．ちょっとやってみませんか．前とやり方は同じですから．

Q．まずこの運動で座標系は，

$$R=PR_0, \qquad P=P(t)$$

というように動いていくわけですが，相対成分の行列は，

$$\Omega=\begin{pmatrix}0 & \omega_{12} & -\omega_{31}\\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23}\\ \omega_{31} & -\omega_{23} & 0\end{pmatrix},\quad \begin{matrix}ここで\\ \omega_{12}=a_{12}(t)dt\\ \omega_{31}=a_{31}(t)dt,\quad \omega_{23}=a_{23}(t)dt\end{matrix} \tag{13}$$

各 R に対して一定の相対的の位置にある座標系 $\tilde{R}=UR$ を考えると，U が一定であることから，$\tilde{R}$ の相対成分行列は(12)によって，

$$\tilde{\Omega}=U\Omega U^{-1} \tag{14}$$

これが $\tilde{e}_3$ 軸のまわりの瞬間回転の行列になるように U を運べばよいわけですね．$\tilde{e}_3$ が軸になっているというのは，

$$\tilde{\omega}_{31}=0,\qquad \tilde{\omega}_{32}=-\tilde{\omega}_{23}=0$$

ということですね．そこで，(14)からこれを計算してみます．

$$U=\begin{pmatrix}u_{11} & u_{12} & u_{13}\\ u_{21} & u_{22} & u_{23}\\ u_{31} & u_{32} & u_{33}\end{pmatrix}\qquad (直交行列，|U|=1)$$

とおくと，$U^{-1}={}^tU$ だから(14)は，

$$\begin{pmatrix}0 & \tilde{\omega}_{12} & -\tilde{\omega}_{31}\\ -\tilde{\omega}_{12} & 0 & \tilde{\omega}_{23}\\ \omega_{31} & -\tilde{\omega}_{23} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_{11} & u_{12} & u_{13}\\ u_{21} & u_{22} & u_{23}\\ u_{31} & u_{32} & u_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \omega_{12} & -\omega_{31}\\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23}\\ \omega_{31} & -\omega_{23} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{11} & u_{21} & u_{31}\\ u_{12} & u_{22} & u_{32}\\ u_{13} & u_{23} & u_{33}\end{pmatrix}$$

となって，

$$\tilde{\omega}_{31}=(u_{13}u_{32}-u_{12}u_{33})\omega_{23}+(u_{11}u_{33}-u_{13}u_{31})\omega_{31}+(u_{12}u_{31}-u_{11}u_{32})\omega_{12}$$
$$\tilde{\omega}_{23}=(u_{22}u_{33}-u_{23}u_{32})\omega_{23}+(u_{23}u_{31}-u_{21}u_{33})\omega_{31}+(u_{21}u_{32}-u_{22}u_{31})\omega_{12}$$

大分複雑になります．

A．U が直交行列だから $U^{-1}={}^tU$，また $|U|=1$ でした．これを使って下さい． $u_{13}u_{32}-u_{12}u_{33}=u_{21}$ 等

Q．そうですか．$U^{-1}={}^tU$ を成分でかいた式を使いますと，

$$\tilde{\omega}_{31}=u_{21}\omega_{23}+u_{22}\omega_{31}+u_{23}\omega_{12},\quad \tilde{\omega}_{23}=u_{11}\omega_{23}+u_{12}\omega_{31}+u_{13}\omega_{12}$$

これらが0になるようにするのには，(13)をも参照して，

$$\frac{u_{12}u_{23}-u_{13}u_{32}}{a_{23}}=\frac{u_{13}u_{22}-u_{11}u_{23}}{a_{31}}=\frac{u_{12}u_{33}-u_{13}u_{22}}{a_{12}}$$

つまり $$\frac{u_{31}}{a_{23}}=\frac{u_{32}}{a_{31}}=\frac{u_{33}}{a_{12}}$$

にすればよいわけです．これで瞬間回転軸がきまりました．ひどく簡単になりましたが，もっとらくに出ませんか．

A．もちろん，この答がわかっていれば，証明でことがすみます．a_{23}，a_{31}，a_{12} がすべて0のときは，瞬間回転軸はありません．このときは瞬間的に静止です．あとを続けて下さい．

Q．このように各点で U を選んで $\bar{R}=UR$ を考えますと，その $\bar{e}_3$ 軸が瞬間回転軸 l になっています．そして，(12)によると，

$$\bar{\Omega}=U\Omega U^{-1}+dUU^{-1}$$

いま，

$$dUU^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \pi_{12} & -\pi_{31}\\ -\pi_{12} & 0 & \pi_{23}\\ \pi_{31} & -\pi_{23} & 0\end{pmatrix}$$

とおきますと，$U\Omega U^{-1}$ のところでは，$\tilde{\omega}_{31}$，$\tilde{\omega}_{32}$ の部分が0ですから，

$$\bar{\omega}_{31}=\pi_{31},\qquad \bar{\omega}_{32}=\pi_{32} \tag{15}$$

UR_0 は錐面 c_1 で母線 l 上に e_3 軸をおいた座標系です．そして，

$$\bar{R}=UR \quad \text{については，}\ d\bar{e}_3=\bar{\omega}_{31}\bar{e}_1+\bar{\omega}_{32}\bar{e}_2$$
$$R'=UR_0 \quad \text{については，}\ de_3'=\pi_{31}e_1'+\pi_{32}e_2'$$

$\bar{R}=(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$，$R'=(e_1', e_2', e_3')$ の重なったところでは(15)によって，錐面 c, c_1 の接していることがわかりました．‘滑らない’ということは，$|d\bar{e}_3|=|de_3'|$ となるのですね．ユークリッド平面上のことを真似てやったわけですが，大分汗をかきました．

A．よくやれました．汗をかいたにしてもちゃんとできたのは，平面の上のことがよくわかっているからですね．‘滑らない’というのは，次に述べるように球面上で解釈するとよくわかります．

2. 球面上の幾何

空間での回転について調べたことは，直ちに球面上の幾何へ応用できる．それを述べていくことにしよう．まず，球面の半径を1として，その中心Oを原点にもつ単位直交系 R を作り，その集まりについて前節のことを考える．球面上の図形の性質はこれによって研究されるわけである．

球面の上の点に対して，O からこの点へいたる単位ベクトルを e_3 にとった R を考え，e_3 を新たに A とかき，$\omega_{31}=\omega_1$，$\omega_{32}=\omega_2$ とおくと，

$$R=\begin{pmatrix} A \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix},\quad \Omega=\begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ -\omega_1 & 0 & \omega_{12} \\ -\omega_2 & -\omega_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

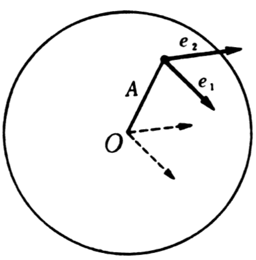


図　4

について，

$$dR=\Omega R \tag{16}$$

成分でかくと

$$\begin{aligned} dA&= \qquad\quad \omega_1e_1+\omega_2e_2 \\ de_1&=-\omega_1A \qquad +\omega_{12}e_2 \\ de_2&=-\omega_2A-\omega_{12}e_1 \end{aligned} \tag{17}$$

この式から

$$\omega_1=(dA,\ e_1),\quad \omega_2=(dA,\ e_2),\quad \omega_{12}=(de_1,\ e_2)$$

Q．(17)は平面上のユークリッド幾何の場合の式とよく似ていますね．やはりこれをもとにして，いろいろのことを考えていくわけですか．

A．その通りです．

平面上では
$$\begin{aligned} dA&=\ \omega_1e_1+\omega_2e_2 \\ de_1&= \qquad\quad \omega_{12}e_2 \\ de_2&=-\omega_{12}e_1 \end{aligned}$$

いま，点 A のまわりの回転を表わす行列を U とし，$\bar{R}=UR$ の相対成分行列を $\bar{\Omega}$ とすると，(12)によって，

$$\bar{\Omega}=U\Omega U^{-1}+dUU^{-1} \tag{18}$$

そこで，

$$\Omega=\begin{pmatrix} 0 & \bar{\omega}_1 & \bar{\omega}_2 \\ -\bar{\omega}_1 & 0 & \bar{\omega}_{12} \\ -\bar{\omega}_2 & -\bar{\omega}_{12} & 0 \end{pmatrix}, \qquad U=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

とおいて計算すると，

$$\bar{\omega}_1=\omega_1\cos\alpha+\omega_2\sin\alpha,\quad \bar{\omega}_2=-\omega_1\sin\alpha+\omega_2\cos\alpha \tag{19}$$

$$\bar{\omega}_{12}=\omega_{12}+d\alpha \tag{20}$$

(19)から，　$\bar{\omega}_1\wedge\bar{\omega}_2=\omega_1\wedge\omega_2$

この式は，$\omega_1\wedge\omega_2$ は R を点 A のまわりに回転しても変わらないこと，つまり，点 A だけできまることを示している．他方，相対成分 ω_1, ω_2 は，球面上の図形の移動（球の中心のまわりの回転）によって変わらないのであるから，

$\omega_1\wedge\omega_2$ は点の集合できまるもので，移動によって変わらない

といえます．実は，これは，点 A の面積素片 dS に等しい．つまり，

$$dS=\omega_1\wedge\omega_2 \tag{21}$$

Q．平面の上では，点 A の直角座標を (x_1, x_2) としますと，$\omega_1\wedge\omega_2=dx_1\wedge dx_2$ となってこれが面積素片であることがよくわかりました．(21)はどうしてわかるのですか．

A．いくつかの方法があります．一番わかりやすいのは，点 A の座標を (x_1, x_2, x_3) としますと，$dA=(dx_1, dx_2, dx_3)$．ω_1, ω_2 は移動で変わりませんから $R=(A, e_1, e_2)$ を

$A=(0, 0, 1)$，$e_1=(1, 0, 0)$，$e_2=(0, 1, 0)$

で考えますと，この点では

$\omega_1=(dA, e_1)=dx_1$，$\omega_2=(dA, e_2)=dx_2$

となって，

$$\omega_1\wedge\omega_2=dx_1\wedge dx_2 \tag{22}$$

ところが $dx_1\wedge dx_2$ は点 A での面積素片ですから，これで証明できたわけです．

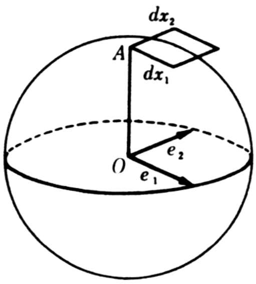


図 5

曲面 $z=f(x, y)$ の面積素片は $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\ dx\wedge dy$．$z_x=0$，$z_y=0$ の点では，$dx\wedge dy$ となる．

Q．(22)は点 $A=(0,0,1)$ のところで成り立つ式で一般にそうなるというのではありませんね．

A．もちろんそうです．しかし，(21)がこれで証明されたことになるのは，$\omega_1\wedge\omega_2$ が基本の座標系のとり方に関係しないことによるわけです．

球面上に曲線 c があるとき，その上の点を A，その点での A の接線を e_1 とすると，c 上の定点から A に至る弧の長さを s として，

$$\frac{dA}{ds}=e_1$$

となっている．したがって，この場合(17)は，$\omega_{12}=kds$ とおくと，

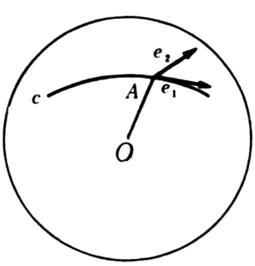


図 6

$$dA=ds\cdot e_1,\quad de_1=-ds\cdot A+kds\cdot e_2,\quad de_2=-kds\cdot e_1 \tag{23}$$

となる．ここで，

平面上では，
$dA=dse_1$
$de_1=\qquad kdse_2$
$de_2=-kdse_1$

$$kds = (de_1, e_2) = -(de_2, e_1) \tag{24}$$

kはこの球面曲線の曲率と呼ばれるもので，大円ではこれは0になっている．

Q．空間曲線の曲率というのを聞いたことがありますが，それですか．

A．いや，ちがいます．一般の曲面の上にある曲線では，測地的曲率というものが考えられますが，その特別なものです．

平面上の場合と同じように，

　球面上の1径数の運動は，1つの軸のまわりの回転を除けば，球面曲線cの上を，別の球面曲線がすべることなく転がってできる運動と考えられる

のである．これは，実質的には前節で空間での回転について述べたところである．

Q．ここで'滑ることなく'というのがわかるわけですね．

A．その通りです．

(15)がここでは $\omega_1=\pi_1$, $\omega_2=\pi_2$ になる．

平面上の幾何での直線に対応するものは，球面上では大円である．いま，大円の弧cの上に点Aをとり，その接線上にe_1をおいて座標系 $R=(A, e_1, e_2)$ を考える．そこで，e_2を軸とする回転の行列をUとし，$\bar{R}=UR$ とすると，$\bar{R}=(\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ についても$\bar{A}$はc上，$\bar{e}_1$はその接線になっている．

$$U=\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおいて$\bar{R}$の相対成分$\bar{\Omega}$を(18)によって計算すると，

$$\bar{\omega}_1 = \omega_1 + d\alpha$$

$$\bar{\omega}_2 = \omega_2 \cos\alpha + \omega_{12}\sin\alpha, \quad \bar{\omega}_{12} = -\omega_2 \sin\alpha + \omega_{12}\cos\alpha$$

したがって，

$$\bar{\omega}_2 \wedge \bar{\omega}_{12} = \omega_2 \wedge \omega_{12}$$

このことから，$\omega_{21}\wedge\omega_2$ は大円の弧cの上にとった点Aや接線e_1のとり方に関係なく，cだけできまる式であることがわかる．しかもこれは，移動に対して不変であるから，

$$dG = \omega_2 \wedge \omega_{12}$$

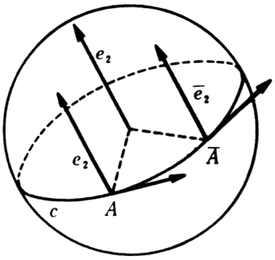


図　7

これは平面上の直線の測度素片の式と同じ形

は大円の弧の集まりの測度素片で，移動によって変わらないものといえる．

Q．これも平面上の直線の集まりの測度素片と全く同じ式ですね．あそこでは，これが$dp\wedge d\theta$に等しいというように図形の上で明快にいえたのですが．

A．それはいえます．しかし，少し複雑です．それよりも，次のことは平面の場合と全く同じように成り立つことが興味があります．

練習問題2．参照

　球面曲線cで，sを定点から任意の点へいたる弧の長さとすると，これに交わる大円の集合の測度素片は，大円とcと交角αを使って，

$$dG = \sin\alpha\, d\alpha \wedge ds \tag{25}$$

　とかける．

Q．証明も平面の場合と同じように出来るのですか．

A．全く同じといってよいでしょう．やってみて下さい．（練習問題３）

Q．球面上の問題で，平面上と全く同じようにいくところと，そうでないところとは，どんな区別があるのでしょうか．

A．それは，何といっても球面上では平行線に当るものがないのですから，その点がちがいます．しかし，(17)の形は，平面の場合の式にくらべてむしろ統一のある形です．それから，球面上では，点と大円の弧とがほとんど同じに扱えることもおわかりでしょう．

Q．ところで，ずいぶん前から気になっているのですが，動座標系の方法のお話になってから，微分形式の外微分のことが一度も出てこないのですが，ここでは応用はないのですか．

A．とんでもないことです．とても大切なのですが，これまでは要らなかったのでお話ししてないのです．そのうちに曲面のお話しをしますが，そこでは外微分がなくては何もやれません．いまから，動座標の方法での外微分の応用を考えましょう．

3. 構造方程式

原点Oを固定した空間での回転で，２つ以上の径数をもった動座標系 $R=PR_0$ の集合を考え，その相対成分行列

$$\Omega=dPP^{-1}=\begin{pmatrix}0&\omega_{12}&\omega_{13}\\\omega_{21}&0&\omega_{23}\\\omega_{31}&\omega_{32}&0\end{pmatrix}\tag{26}$$

についてしらべてみる．まずこの式から

$$\Omega P=dP\tag{27}$$

両辺の外微分をとると，　$d\Omega\cdot P-\Omega\wedge dP=0.$

(27)の dP を代入して，　$(d\Omega-\Omega\wedge\Omega)P=0$

P^{-1} を左から掛けて，

$$d\Omega-\Omega\wedge\Omega=0$$

(26)を使って Ω を成分で表わすと，

$$d\omega_{12}=\omega_{13}\wedge\omega_{32},\quad d\omega_{13}=\omega_{12}\wedge\omega_{23},\quad d\omega_{23}=\omega_{21}\wedge\omega_{13}\tag{28}$$

外微分は，一般に $\omega=\sum_i a_i dx_i$ について，$d\omega=\sum_i da_i\wedge dx_i$ で定義される．

これが構造方程式と呼ばれる基本的な式である．

Q．大分大胆な計算をやりましたね．だいじょうぶですか．

A．まず，$d(dP)=0$ ですが，dP は各成分が全微分になっている行列で，行列の外微分というのは，各成分の外微分をとることですから，これでよいでしょう．

Q．それはわかりますが，次の $d(\Omega P)=d\Omega\cdot P-\Omega\wedge dP$ というのがわかりません．ことに－(マイナス)はなぜつくのですか．

A．これは，ていねいに言わないとわかりませんね．$\Omega=(\omega_{ij})$，$P=(p_{ij})$ ですと，ΩP の第 i 行第 j 列の元は $\sum_k \omega_{ik}p_{kj}$．その外微分をとって

$$d(\sum_k \omega_{ik}p_{kj})=\sum_k d(\omega_{ik}p_{kj})=\sum_k(d\omega_{ik}p_{kj}-\omega_{ik}\wedge dp_{kj})$$
$$=\sum_k d\omega_{ik}p_{kj}-\sum_k\omega_{ik}\wedge dp_{kj}$$

ここで，一般に ω が1次微分式，m が関数のとき，

$$d(\omega m)=d\omega\cdot m-\omega\wedge dm$$

であることを使っているわけですが，これは

$$d(m\omega)=md\omega+dm\wedge\omega$$

から出てくるのです．

Q．これだけのことを一挙に使ってやった計算ですね．わからないわけだ．

A．しかし，慣れてくればそれ程のことはありませんよ．

Q．ところで，(28)にはどんな応用があるのですか．

A．ここではまだ，いろいろお話しするわけにも行きませんが，球面の場合をお話しします．

球面上で(28)を考えると，$\omega_{31}=\omega_1$，$\omega_{32}=\omega_2$ として，

$$d\omega_1=\omega_2\wedge\omega_{12},\quad d\omega_2=-\omega_1\wedge\omega_{12} \tag{29}$$

$$d\omega_{12}=-\omega_1\wedge\omega_2 \tag{30}$$

いま，球面上の点 A を球面座標 (θ, φ) で表わすと，

$$A=(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)$$

この式から，

$$\frac{\partial A}{\partial\theta}=(\cos\theta\cos\varphi,\ \cos\theta\sin\varphi,\ -\sin\theta)$$

$$\frac{\partial A}{\partial\varphi}=(-\sin\theta\sin\varphi,\ \sin\theta\cos\varphi,\ 0)$$

そこで，$e_1=\dfrac{\partial A}{\partial\theta}$，

$$e_2=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A}{\partial\varphi}=(-\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ 0)$$

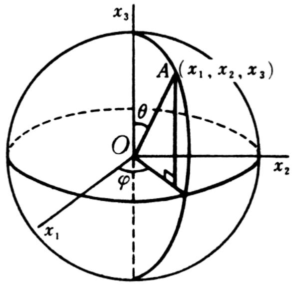


図　8

$x_1=\sin\theta\cos\varphi$
$x_2=\sin\theta\sin\varphi$
$x_3=\cos\theta$

とおくと，A, e_1, e_2 を座標系にとることができる．このとき，$dA=d\theta e_1+\sin\theta d\varphi e_2$ だから，

$$\omega_1=(dA,\ e_1)=d\theta,\quad \omega_2=(dA,\ e_2)=\sin\theta d\varphi$$

また，　$$\omega_{12}=(de_1,\ e_2)=\cos\theta d\varphi$$

これらはもちろん(29)(30)を満たしている．$\omega_1\wedge\omega_2$ は面素だから dS とおくと，

$$dS=\omega_1\wedge\omega_2=\sin\theta d\theta\wedge d\varphi=-d(\cos\theta d\varphi)=-d\omega_{12}$$

$dS=\sin\theta\, d\theta\wedge d\varphi$ は球面積の基本である．

この式はまた，

$$dS=d((1-\cos\theta)d\varphi)=\frac{1}{2}d\left(\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 d\varphi\right)$$

とかける．このことから，球面上で直角座標が(0, 0, 1)の点を N とすると，$2\sin\dfrac{\theta}{2}$ が弦 NA の長さに等しく，これを l とすると，球面上の領域 D の面積 S は，ストークスの定理によって次のようにかける．

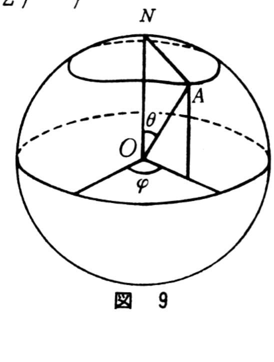


図　9

$$S=\int_D\frac{1}{2}d(l^2 d\varphi)=\int_{\partial D}\frac{1}{2}l^2 d\varphi$$

∂D は領域 D の周

これは球面上の図形の面積を求めるのに便利な式で，平面上の極座標での公式によく似ている．

Q．ちょっと面白いですね．これから外微分の応用がいろいろ出てくるというので楽しみです．あの計算ははじめは変なものだと思いましたが，少しずつ味がわかってきたような気がします．

A．そうでしょう．計算をよく練習しておいて下さい．

練 習 問 題

1. 空間で，e_3 軸のまわりに回転している座標系 R の角速度が $c=c(t)$ とする．動点の R に関する座標を x_1, x_2, x_3 とするとき，この点の速度，加速度の R についての成分を求めよ．

2. 球面上で定点 M をとり，M から任意の大円に下した垂線の足を P，弧 MP の中心角を α とする．また，M のまわりの回転の角を β とすると，大円の集まりの測度素片は $\cos\alpha d\alpha\wedge d\beta$ で与えられる．これを証明せよ．

3. 76 ページ(25)を証明せよ．

4. 平面上の座標系 $R=(A, e_1, e_2)$ についての構造方程式は

$$d\omega_1=\omega_2\wedge\omega_{21},\quad d\omega_2=\omega_1\wedge\omega_{12},\quad d\omega_{12}=0$$

であることを示せ．

答とヒント

1. 71 ページ (10) (11) による．$v_1=\dot{x}_1-cx_2$, $v_2=\dot{x}_2+cx_1$, $v_3=\dot{x}_3$．加速度の成分は，$\alpha_1=\ddot{x}_1-c\dot{x}_2-c^2x_1-\dot{c}x_2$, $\alpha_2=\ddot{x}_2+c\dot{x}_1-c_2x^2+\dot{c}x_1$, $\alpha_3=\ddot{x}_3$ (・は t で微分することを表わす)

2. M を A^0 とし，M のまわりの回転の相対成分行列を Ω, $e_1{}^0$ 軸のまわりの角 α の回転を U として $\bar{\Omega}=U\Omega U^{-1}+dUU^{-1}$ について $\bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}_{12}$ を求め，その外積を作れ．

3. 平面上の直線の場合にならってやる．

4. 77ページと同様．$dA=\omega_1e_1+\omega_2e_2$, $de_1=\omega_{12}e_2$, $de_2=-\omega_{12}e_1$ を外微分してもよい．

第7章 動座標系の方法(4)

前回は，３次元のユークリッド空間における原点を固定した動座標系について，基本的なことを考え，これを球面上の幾何学へ応用した．今回は，原点も移動する場合について調べ，その応用を考えていくことにする．

1. ユークリッド空間における動座標系

３次元のユークリッド空間で，基本の直角座標系 R_0 について，原点を A^0，単位直交系を e_1^0, e_2^0, e_3^0 とし，R_0 に表向きの移動を行なってできる座標系を R として，

$$R_0=\begin{pmatrix} A^0 \\ e_1^0 \\ e_2^0 \\ e_3^0 \end{pmatrix},\quad R=\begin{pmatrix} A \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ 0 & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ 0 & p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \tag{1}$$

P…変位行列
A の成分が (x_1, x_2, x_3)
e_i の成分が (p_{i1}, p_{i2}, p_{i3})

とおくとき，

$$R=PR_0 \tag{2}$$

となる．ここで，３次の行列 (p_{ij}) は直交行列で，

$$\det(p_{ij})=1$$

である．このような R の全体は６つの径数（パラメーター）をもっている．そこで，k 個 $(1\leqq k\leqq 6)$ の径数をもつ R の集合を考え，P の各要素はこれらの径数について，C^∞ 級とする．このとき，

$$dR=\Omega R \tag{3}$$

ここに，

$$\Omega=dPP^{-1} \tag{4}$$

Ω…相対成分行列

そして，(1) (4) によると，Ω は次のような形の行列である．

$$\Omega=\begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ 0 & \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ 0 & \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ 0 & \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{pmatrix} \tag{5}$$

これによると (3) は，

$$dA=\sum_{i=1}^{3}\omega_i e_i,\quad de_i=\sum_{j=1}^{3}\omega_{ij}e_j \qquad (i=1,2,3) \tag{6}$$

と表わすことができて，

$$\omega_i=(dA, e_i),\qquad \omega_{ij}=(de_i, e_j) \tag{7}$$

そして，

$$\omega_{ij}=-\omega_{ji} \qquad (i, j=1,2,3) \tag{8}$$

であることもわかっている.

さらに,(6) の両辺の外微分をとると,

$$0=\sum_i d\omega_i e_i-\sum_i \omega_i\wedge de_i,\qquad 0=\sum_j d\omega_{ij}e_j-\sum_j \omega_{ij}\wedge de_j$$

一般に ω が1次微分式で m が関数のとき,
$d(m\omega)=md\omega+dm\wedge\omega$
$d(\omega m)=d\omega\cdot m-\omega\wedge dm$

両辺に (6) を代入した式から,

$$d\omega_i=\sum_j \omega_j\wedge\omega_{ji},\qquad d\omega_{ij}=\sum_k \omega_{ik}\wedge\omega_{kj} \tag{9}$$

(8) を参照すれば,結局次のようである.

$$d\omega_1=\omega_2\wedge\omega_{21}+\omega_3\wedge\omega_{31},\qquad d\omega_2=\omega_1\wedge\omega_{12}+\omega_3\wedge\omega_{32}$$
$$d\omega_3=\omega_1\wedge\omega_{13}+\omega_2\wedge\omega_{23}$$
$$d\omega_{12}=\omega_{13}\wedge\omega_{32},\quad d\omega_{13}=\omega_{12}\wedge\omega_{23},\quad d\omega_{23}=\omega_{21}\wedge\omega_{13}$$

これらの式も,実質的には前回に導いたもので構造方程式といわれている.

Q. 大体,前に伺ったことですが,式の数が増えましたね.構造方程式は,1径数の図形や運動では,0=0 で意味のないものばかりだというわけで,応用は少ししか聞きませんでした.

A. そうです.次のことも原理的には前と同じですが,あとからのことの準備としてたいせつです.

変位の行列を U として,(2) の代わりに,

$$\bar{R}=UR=(UP)R_0$$

を考え,$\bar{R}$ の相対成分行列を $\bar{\Omega}$ とすると,(4) によって,

$$\bar{\Omega}=U\Omega U^{-1}+dUU^{-1} \tag{10}$$

これが基本の式であることは,これまでたびたび述べてきたところである.

以上のことを準備として,空間における図形の研究を進めていくことにする.

2. 点を要素とする等質空間

動座標系の方法による研究では,点はこれを原点にもつ座標系の全体でおきかえて考えるのであった.そこで,原点のまわりの回転を表わす行列を U とし,

G…表向きの移動全体
H…原点を固定する移動全体
こうしてできる G/H

$$U=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&u_{11}&u_{12}&u_{13}\\0&u_{21}&u_{22}&u_{23}\\0&u_{31}&u_{32}&u_{33}\end{pmatrix}\quad \text{とおくと,}\quad dUU^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&\pi_{11}&\pi_{12}&\pi_{13}\\0&\pi_{21}&\pi_{22}&\pi_{23}\\0&\pi_{31}&\pi_{32}&\pi_{33}\end{pmatrix} \tag{11}$$

の形になる.したがって,(10) の $\bar{\Omega}$ の成分も $\bar{\omega}_i, \bar{\omega}_{ij}$ を使って (5) のように表わすことにすると,

$$\bar{\omega}_i=\sum_{j=1}^{3} u_{ij}\omega_j \qquad (i=1,2,3) \tag{12}$$

となる.このとき,$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ を点の主相対成分という.

また,行列 (u_{ij}) は正規直交行列だから $\det(u_{ij})=1$ である.したがって,(12) から,

$$\bar{\omega}_1\wedge\bar{\omega}_2\wedge\bar{\omega}_3=\omega_1\wedge\omega_2\wedge\omega_3$$

そこで,

$$dV=\omega_1\wedge\omega_2\wedge\omega_3 \tag{13}$$

とおくと,これは動座標系 R の頂点 A の位置のみに関係し,かつ移動によって変わらないものである.これを点の集合の測度素片と考えることができる.

相対成分 ω_i, ω_{ij} は移動によって変わらない.

Q．(12) に当る ω_{ij} の変換式では，$\bar{\omega}_{ij}$ が ω_{kh} に1次同次変換を施したものというわけには行かないのですね．

A．そうです．そうなっているというのが，主相対成分の特徴です．

Q．点の測度素片 (13) というのは，点 A の体積素片とはちがうのですか．

A．お察しの通り同じものです．(7) によると，

$$\omega_i=(dA, e_i)=\sum_{j=1}^{3} p_{ij}dx_j \qquad (i=1, 2, 3)$$

だから

$$\omega_1\wedge\omega_2\wedge\omega_3=dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$$

となります．

動座標系の方法で，立体図形の体積を求める公式を求めてみよう．

立体図形を K とし，これを1径数の平面 E_t $(t_1\leqq t\leqq t_2)$ で切った切り口の面積を $S=S(t)$ とし，これらの切り口は交わっていないとする．切り口の重心を G とし，その軌跡の曲線の弧の長さの微分を ds，点 G でこの曲線にひいた接線が切り口の平面となす角を α とする．このとき，立体 K の体積 V は次のように表わされる．

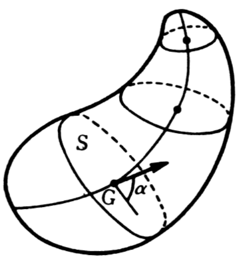


図 1

$$V=\int S\sin\alpha\, ds \qquad (14)$$

証明．切り口の平面 E_t 上で，G を原点 A として e_1, e_2 を E_t 上にとった座標系 $R=R(t)$ を考え，この R を A, e_1, e_2 の定める平面上で任意の位置へ平行移動してできる座標系を $\bar{R}$ とすると，

$$\bar{R}=UR,$$

$$U=\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

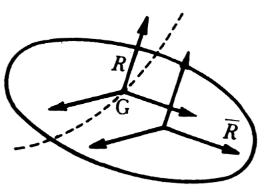


図 2

そこで，$R, \bar{R}$ の相対成分行列をそれぞれ $\Omega, \bar{\Omega}$ とすると (10) によって，

$$\bar{\omega}_1=\omega_1+x_1\omega_{11}+x_2\omega_{21}+dx_1, \qquad \bar{\omega}_2=\omega_2+x_1\omega_{12}+x_2\omega_{22}+dx_2$$

$$\bar{\omega}_3=\omega_3+x_1\omega_{13}+x_2\omega_{23}$$

そこで，$\bar{R}$ の原点 $\bar{A}$ の体積素片を dV とすると，(13) から，

$$dV=\bar{\omega}_1\wedge\bar{\omega}_2\wedge\bar{\omega}_3$$

ところが，$\omega_i=a_i(t)dt$，$\omega_{ij}=a_{ij}(t)dt$ であることから，

$$\bar{\omega}_1\wedge\bar{\omega}_2\wedge\bar{\omega}_3=dx_1\wedge dx_2\wedge\omega_3+x_1dx_1\wedge dx_2\wedge\omega_{13}+x_2dx_1\wedge dx_2\wedge\omega_{23}$$

いま，t を固定して E_t の上で積分すると，

$$\iint dx_1dx_2=S$$

また，G が重心であることから，

$$\iint x_1dx_1dx_2=0, \qquad \iint x_2dx_1dx_2=0$$

一般に重心の座標 (X_1, X_2) は，
$$X_i=\frac{1}{S}\iint x_idx_1dx_2 \qquad (i=1, 2)$$

したがって,

$$\bar{\omega}_1\wedge\bar{\omega}_2\wedge\bar{\omega}_3=dx_1\wedge dx_2\wedge\omega_3$$

これを積分して,

$$V=\int S\omega_3$$

ところが,

$$\omega_3=(dA, e_3)=\left(\frac{dA}{ds}, e_3\right)ds=\sin\alpha\,ds$$

だから，これで (14) が証明されたことになる.

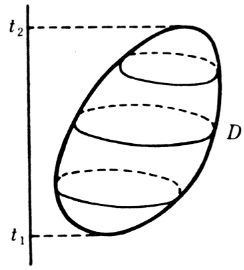


図 3

Q．一番はじめの立体 K を平面 E_t で切るところのお話しは，少し粗雑のように思いますが.

A．そうですね．もう少していねいにいうと次のようです．(u_1, u_2, t) を座標にもつ空間で立体 D を考え，D から K への写像

$$x_i=f_i(u_1, u_2, t) \qquad (i=1, 2, 3)$$

が 1 対 1 の C^1 級の写像で，関数行列式が正，かつ D での t=一定 が K での平面 E_t へ移っているといえばよいでしょう.

Q．(14) は応用が広いように思いますが.

A．そうです．まず，ふつう立体を平行な平面で切って切り口の面積を S，これに垂直な方向への変位の微分を dh としますと，体積は

$$V=\int Sdh$$

と表わされることはよく知っていますね．これは，(14) で $ds\cdot\sin\alpha=dh$ となっているわけです.

Q．このときは重心は出てこないのですね．また，円環体の体積を求めるのに，これを円が直線のまわりに1回転すると考えて，

(円の面積)×(中心の動いた距離) (15)

というように学んだことは，大変面白かったのですが，これと関係はありませんか.

A．それは大ありです．一般に，1径数の平面の集まりがあって，これらのすべてに直交する曲線の集まりを考えて，これでできる筒 (tube) を考えますと，これをはじめの平面で切った切り口はすべて合同です．(証明は 63 ページ)

そしてまた，切り口の重心 G の軌跡もはじめの平面に垂直です．こうして，筒の体積 V は，切り口の面積 S と重心の動いた距離 l によって,

$$V=Sl$$

と表わされることが (14) から出ます.

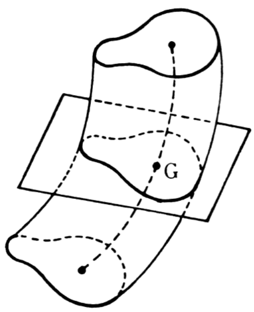


図 4

ギュルダン・パプスの定理の一般化

Q．なるほど，(14) の有難さがわかりました．回転体の場合は，この筒の特別な場合で，(15) はそのまた特例というわけですね.

A．その通りです．こんどは，1径数の動座標系の応用例として，空間曲線のことを考えてみましょう.

空間にある曲線 c が，その上にとった定点から任意の点に至る弧の長さ s を径数として，

$$x_1=x_1(s),\quad x_2=x_2(s),\quad x_3=x_3(s)$$

で与えられているとする．いま，この点 (x_1, x_2, x_3) を A とし，A を原点とし，接線単位ベクトルを e_1 にとった座標系を各点ごとに定めて R とすると，

$$dR=\Omega R$$

における Ω については，(5) において，

$$\omega_1=ds,\quad \omega_2=0,\quad \omega_3=0$$

である．この R を e_1 軸のまわりに回転してできる座標軸を $\bar{R}$ とすると，

$$\bar{R}=UR$$

$$U=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha\\ 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

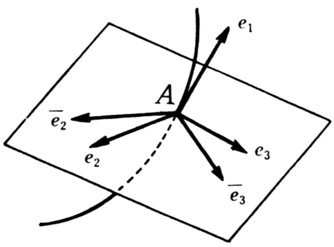


図 5

これを (10) に代入して，$\bar{\Omega}$ と Ω の成分の関係をしらべると，

$$\bar{\omega}_{12}=\omega_{12}\cos\alpha+\omega_{13}\sin\alpha,\qquad \bar{\omega}_{13}=-\omega_{12}\sin\alpha+\omega_{13}\cos\alpha$$

$$\bar{\omega}_{23}=\omega_{23}+d\alpha$$

さて，$\omega_{ij}=a_{ij}(s)ds$ であるから，

$$a_{12}(s)\neq 0,\quad \text{または}\quad a_{13}(s)\neq 0 \tag{16}$$

である限り，$\cos\alpha:\sin\alpha=a_{12}(s):a_{13}(s)$ となるように α をとって，

$$\bar{\omega}_{13}=0$$

とすることができる．このように定められた座標系を，この空間曲線のフルネーの座標系という．α のきめ方は2通りあるが，いま s について連続であるようにしておく．

こうしてきめた座標系 $\bar{R}$ を改めて R とし，

$$\omega_{12}=kds,\quad \omega_{23}=tds\qquad (k=k(s),\ t=t(s))$$

とおくと，(6) は次のように表わすことができる．

$$\frac{dA}{ds}=e_1,\quad \frac{de_1}{ds}=ke_2,\quad \frac{de_2}{ds}=-ke_1+te_3,\quad \frac{de_3}{ds}=-te_2 \tag{17}$$

これが空間曲線のフルネー・セレーの公式と呼ばれるもので，空間曲線の研究では，基本的のものといえる． Frenet-Serret

次に (16) の成り立たないところ，つまり，$a_{12}(s)=0, a_{13}(s)=0$ である点を変曲点という．すべての点が変曲点のときは，

$$\frac{de_1}{ds}=0 \text{ から } e_1=c_1,\quad \frac{dA}{ds}=c_1 \text{ となって } A=sc_1+c_2 \quad (c_1, c_2 \text{ は定ベクトル})$$

したがってもとの曲線は直線となる．

Q．平面曲線の場合（第4章）より少し複雑ですが，k の意味づけは，

$$\frac{dA}{ds}=e_1,\qquad \frac{de_1}{ds}=ke_2$$

から同じように出来ますね．つまり，曲線上で，弧の長さで Δs だけ進むとき，s と $s+\Delta s$ の点での接線のつくる角の大きさを $\Delta\theta$ としますと，

$$k=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}$$

でした．この場合も，k を曲率と呼んでよいのですか．

曲率…curvature

A．そうです．こんどは，t というものも出てきました．これは捩率(れいりつ)といいます．その意味づけは次のようです．

捩率…torsion

(17) を繰返し使うと，次のことが得られる．

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dA}{ds}=e_1,\qquad \frac{d^2A}{ds^2}=\frac{de_1}{ds}=ke_2\\&\frac{d^3A}{ds^3}=\frac{d}{ds}(ke_2)=\frac{dk}{ds}e_2+k\frac{de_2}{ds}=-k^2e_1+\frac{dk}{ds}e_2+kte_3\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

そこで，曲線上の任意の点について，ここを $s=0$ にとって，その近くで $A=A(s)$ のテーラー展開を作る．この場合，$s=0$ での e_1, e_2, e_3 を $e_1(0), e_2(0), e_3(0)$ で，また，k, t を k_0, t_0 で表わし，$A(0)$ を原点とする座標系について考えると，(18) によって，

$$A(s)=A(0)+A'(0)s+\frac{1}{2!}A''(0)s^2+\frac{1}{3!}A'''(0)s^3+O(s^4)$$

$$=(s+O(s^3))e_1(0)+\left(\frac{1}{2}k_0s^2+O(s^3)\right)e_2(0)+\left(\frac{1}{6}k_0t_0s^3+O(s^4)\right)e_3(0)$$

したがって，$R(0)$ についての $A(s)$ の直角座標を x_1, x_2, x_3 とすると，

$$x_1=s+O(s^3),\qquad x_2=\frac{1}{2}k_0s^2+O(s^3),\qquad x_3=\frac{1}{6}k_0t_0s^3+O(s^4)$$

このことから，$k_0\neq 0$, $t_0\neq 0$ のときは，$A(0)$ の近くは，ほぼ，

$$x_1=s,\qquad x_2=\frac{1}{2}k_0s^2,\qquad x_3=\frac{1}{6}k_0t_0s^3\tag{19}$$

に近い線と考えられ，その座標面への正射影は，下の図に示すようになっている．

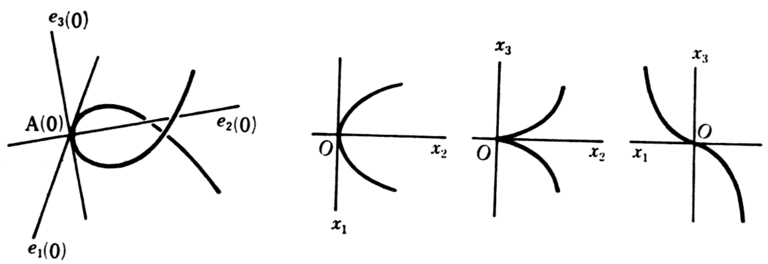


図 6

Q．$k_0\neq 0$, $t_0\neq 0$ である限り，どの点の近くもこうなっているというのですね．そうすると，空間曲線は，ある方向からみると尖っているところがあっても不思議はないのですね．

A．そうです．$k_0\neq 0$, $t_0\neq 0$ である限り，どの点もそうなっています．また，どの点 A の近くも e_1, e_2 で作られる平面に s^3 の位数で近いわけです．もし $t=0$ ですと，その位数がもっと高くなるのです．

一般に，$k_0\neq 0$ の点 $A=A(s)$ で，A を通り e_1, e_2 をふくむ平面を接触平面といい，e_2 を主法線，e_3 を従法線という．そうすると，(17) の最後の式

接触平面…osculating plane

$$\frac{de_3}{ds} = -te_2 \qquad (20)$$

から次のことが得られる．

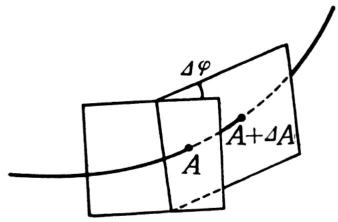


図 7

曲線 c 上の点 $A(s)$, $A(s+\Delta s)$ での接触平面のつくる角を $\Delta\varphi$ とすると，

$$|t| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \qquad (21)$$

証明．e_3 が接触平面の法線であるから，$\Delta\varphi$ は $A(s)$, $A(s+\Delta s)$ での e_3 のつくる角に等しい．これと (20) とから (21) は容易に導かれる．

Q．平面曲線では，e_1, e_2 はこの平面上のベクトルですから，e_3 はいつもこの平面に垂直で一定ですね．ですから $t=0$ となります．逆は成り立つのですか．

A．逆も成り立ちます．それは (19) から $e_3 = c$ (定ベクトル)．もともと $\omega_3 = (dA, e_3) = 0$ だから $(dA, c) = 0$, これから $(A, c) =$ 一定．これは平面のベクトル方程式です．こうして，

振率がつねに 0 $\rightleftarrows$ 平面曲線

ですから，直線でない平面曲線は，曲がってはいるが‘振れていない’というわけです．

平面曲線の場合と同じように，空間曲線についても次の基本定理が成り立つ．

$f(s)$, $g(s)$ が与えられた連続関数で，$f(s) \neq 0$ とする．このとき，s を曲線 c 上で定点から任意の点 A に至る弧の長さとし

$$k = f(s), \quad t = g(s)$$

がその点での曲率，振率であるような曲線 c は存在してすべて合同である．

証明は，平面曲線の場合と全く同様である．

3．直線を要素とする等質空間

空間で，向きを考えた直線 l は，その上に原点 A と e_1 軸をおいた座標系の全体として考えることができる．このような座標系の 1 つを R とし，他のものを $\bar{R}$ とすると，

G…表向きの移動全体
H…原点と e_1 を e_1 軸の上で動かす移動の全体
こうしてできる G/H

$$\bar{R} = UR \qquad (22)$$

ここに，

$$U = \begin{pmatrix} 1 & u & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

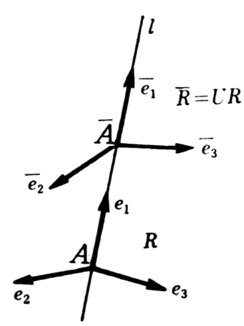


図 8

$R, \bar{R}$ についての相対成分行列を $\Omega, \bar{\Omega}$ とし，その成分の間の関係を (10) によって求めると，

$$\left.\begin{aligned} \bar{\omega}_2 &= \ \ (\omega_2 + u\omega_{12})\cos\alpha + (\omega_3 + u\omega_{13})\sin\alpha \\ \bar{\omega}_3 &= -(\omega_2 + u\omega_{12})\sin\alpha + (\omega_3 + u\omega_{13})\cos\alpha \\ \bar{\omega}_{12} &= \omega_{12}\cos\alpha + \omega_{13}\sin\alpha, \quad \bar{\omega}_{13} = -\omega_{12}\sin\alpha + \omega_{13}\cos\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

$$\bar{\omega}_1 = \omega_1 + du, \quad \bar{\omega}_{23} = \omega_{23} + d\alpha \qquad (24)$$

ここで，(23) は $\omega_2, \omega_3, \omega_{12}, \omega_{13}$ についての 1 次同次変換になっているが，(24) はそうでない．

ユークリッド空間で，向きを考えた直線の全体は，その上にユークリッドの移動の群の働く等質空間と考えられるわけであるが，上の考察によって，相対成分 ω_i, ω_{ij} の中で $\omega_2, \omega_3, \omega_{12}, \omega_{13}$ がこの等質空間において本質的なものと考えることができる．これを主相対成分という．

(23) によると，

$$\bar{\omega}_2\wedge\bar{\omega}_3\wedge\bar{\omega}_{12}\wedge\bar{\omega}_{13}=(\omega_2+u\omega_{12})\wedge(\omega_3+u\omega_{13})\wedge\omega_{12}\wedge\omega_{13}$$
$$=\omega_2\wedge\omega_3\wedge\omega_{12}\wedge\omega_{13}$$

となる．したがって，これは，各直線に付随してとった R のとり方に関係なく直線の集まりだけによってきまる式である．しかも，相対成分 ω_i, ω_{ij} は移動に対して不変だから，

$$dG=\omega_2\wedge\omega_3\wedge\omega_{12}\wedge\omega_{13}$$

は直線の集まりの測度素片で，移動によって変わらないものといえる．そこで，

$$\sigma=\omega_2\wedge\omega_3,\qquad \sigma_0=\omega_{12}\wedge\omega_{13}$$

とおくと，

$$dG=\sigma\wedge\sigma_0$$

となる．ここで，σ_0 は直線の方向 e_1 を原点からひいてできるベクトルの先端のつくる球面上の測度素片（立体角素片）である．また，e_1 の方向をきめて直線を動かすとき，e_1 に垂直な平面への正射影としてできる点の集合の測度素片が σ と考えられる．

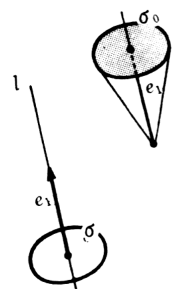


図 9

Q．少し話が早すぎて，よくわかりませんが，応用のありそうなことですね．

A．そうです．しかし，ここでは，この話に深入りするのはやめて，直線の1径数の集合（線織面）について考えましょう．

1径数の直線の集合は，特殊な曲面を作る．柱面や錐面はその特別な場合である．ここでは，こうした面を一般に考える．これを線織面という．この場合，各直線を有向直線と考え，その上に A と e_1 をおく座標系 R を1つずつ付随させて考える．次に，これに (22) で与えられる $\bar{R}$ を考えると，Ω と $\bar{\Omega}$ の成分の関係は (23) (24) で与えられる．いま，径数を t とすると，$\omega_i=a_i(t)dt$，$\omega_{ij}=a_{ij}(t)dt$ である．そこで，

$$a_{12}=a_{12}(t)\neq 0,\quad \text{または}\quad a_{13}(t)\neq 0 \tag{25}$$

のときを考えて，$\cos\alpha:\sin\alpha=a_{12}:a_{13}$ となるように α をきめると (23) から，

$$\bar{\omega}_{13}=0$$

この α に対しては，(23) から，

$$\bar{\omega}_2=\pm(a_{12}{}^2+a_{13}{}^2)^{-\frac{1}{2}}((a_2a_{12}+a_3a_{13})+(a_{12}{}^2+a_{13}{}^2)u)dt$$

であることから，

$$\bar{\omega}_2=0$$

となるように u をきめることができる．このようにして定めた $\bar{R}$ を改めて R とし，$\bar{\omega}_i, \bar{\omega}_{ij}$ を ω_i, ω_{ij} で表わすと，$\omega_2=0$，$\omega_{13}=0$．

そこで，径数 t を改めて次に述べる s にとって，

$$\omega_1 = a(s)ds, \quad \omega_3 = k(s)ds, \quad \omega_{23} = b(s)ds$$

とおくと，

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dA}{ds} = ae_1 + ke_3 \\ &\frac{de_1}{ds} = e_2, \quad \frac{de_2}{ds} = -e_1 + be_3, \quad \frac{de_3}{ds} = -be_2 \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

となる．ここで，s は原点からベクトル e_1 をひいてできる球面上の曲線の弧の長さ，$b=b(s)$ はこの球面曲線の曲率である．（76 ページ）また，k, a は次の意味をもっている．この線織面の1つの直線 l に対して上のようにきまった座標系 $R=R(s)$ を考え，これに近い直線 l' について考えた $R(s+\Delta s)$ において，l' 上で原点から $-a\Delta s$ だけ進んだ点

$$B = A + \Delta A - a\Delta s(e_1 + \Delta e_1) \tag{27}$$

を考える．このとき，$\Delta s \to 0$ とすると，直線 AB は l, l' の共通垂線の極限の方向であり，またその共通垂線の長さを h とすると，

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{h}{\Delta s} = k \tag{28}$$

となっている．k を分配径数という．

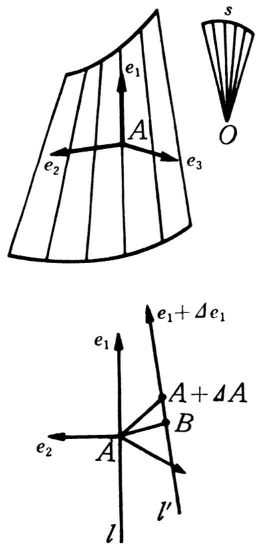


図 10

Q．証明はどのようにするのですか．やはり (26) を使うのですね．

A．そうです．(27) できまる $B-A$ と，l, l' の共通垂線の方向 $[e_1, e_1+\Delta e_1]$ を Δs について展開して考えますと，(26) によって，

$[e_1, e_1+\Delta e_1]$ は e_1 と $e_1+\Delta e_1$ との外積
一般に $O(\varepsilon)$ は ε と少くとも同位の数であることを示す．

$$\begin{aligned} B-A &= \Delta A - a\Delta s(e_1+\Delta e_1) = \frac{dA}{ds}\Delta s - ae_1\Delta s + O((\Delta s)^2) \\ &= (ae_1 + ke_3)\Delta s - ae_1\Delta s + O((\Delta s)^2) \\ &= ke_3\Delta s + O((\Delta s)^2) \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} [e_1, e_1+\Delta e_1] &= [e_1, \Delta e_1] = \left[e_1, \frac{de_1}{ds}\Delta s + O((\Delta s)^2)\right] \\ &= [e_1, e_2\Delta s + O((\Delta s)^2)] = e_3\Delta s + O((\Delta s)^2) \end{aligned} \tag{30}$$

こうして，$\Delta s \to 0$ のとき，$B-A$, $[e_1, e_1+\Delta e_1]$ の方向はともに e_3 の方向へ近づく．また (30) の長さは $\Delta s + O((\Delta s)^2)$ である．

これから，

$$h\Delta s = (B-A, e_3\Delta s + O((\Delta s)^2)) = k(\Delta s)^2 + O((\Delta s)^3)$$

一般に A を通る直線 l と B を通る直線 m の共通垂線の方向の単位ベクトルを n とすると共通垂線の長さは $(B-A, n)$

これから (28) が導かれる．

Q．3次元ベクトルの計算がよくわかっていませんと，このような計算はできませんね．

A．これくらいの図形的なことになるとどうしてもそうですね．なお，(25) がつねに成り立たないのは，$a_{12}=0$, $a_{13}=0$ のときで，これは，$de_1=0$, e_1 が定ベクトルのことです．だから，この場合は，曲面は柱面になるわけです．

4. 平面を要素とする等質空間

この場合，平面の上に原点 A と e_1, e_2 をおく座標系の 1 つを R，他の同じような座標系を $\bar{R}$ とすると，

$$\bar{R}=UR$$

ここで，

$$U=\begin{pmatrix} 1 & u_1 & u_2 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

G…表向きの移動全体
H…原点と e_1, e_2 をそれでできる平面上で動かす移動全体
こうしてできる G/H

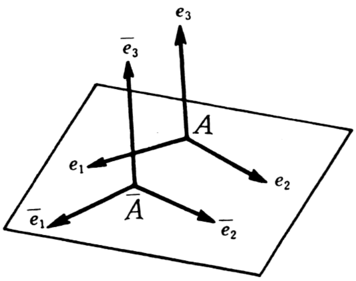


図 11

そこで，$R, \bar{R}$ に対する相対成分行列を $\Omega, \bar{\Omega}$ とし，その成分の関係を求めると，

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\omega}_3=\omega_3+u_1\omega_{13}+u_2\omega_{23} \\ &\bar{\omega}_{13}=\omega_{13}\cos\alpha+\omega_{23}\sin\alpha, \quad \bar{\omega}_{23}=-\omega_{13}\sin\alpha+\omega_{23}\cos\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

$\omega_1, \omega_2, \omega_{23}$ の変換はこれとちがって 1 次同次変換ではない．

そこで，この $\omega_3, \omega_{13}, \omega_{23}$ を平面を要素とする等質空間の主相対成分という．そして，(31) から，

$$dE=\bar{\omega}_3\wedge\bar{\omega}_{13}\wedge\bar{\omega}_{23}=\omega_3\wedge\omega_{13}\wedge\omega_{23} \qquad (32)$$

これを平面の集合の測度素片と考えることができる．これは，移動によって変わらない．

いま，原点から e_3 に等しいベクトルをひいた先端のえがく球面上の面素を σ_0 とすると，

$$\sigma_0=\omega_{13}\wedge\omega_{23}$$

原点 A^0 からこの平面へ下した垂線の長さを p とすると，$(A, e_3)=p$．したがって，

$$\begin{aligned} dp&=(dA, e_3)+(A, de_3) \\ &=\omega_3+(A, \omega_{13}e_1+\omega_{23}e_2) \\ &=\omega_3+(A, e_1)\omega_{13}+(A, e_2)\omega_{23} \end{aligned}$$

したがって (32) から，

$$dE=dp\wedge\sigma_0$$

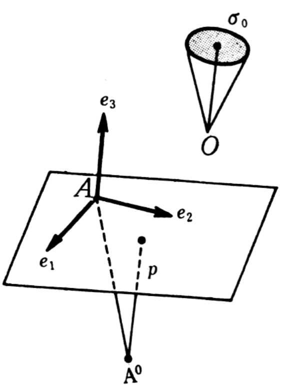


図 12

Q．これも応用がありそうですね．

A．そうです．しかし，ここでも深入りする余裕はありません．

Q．この場合，平面の 1 径数集合というのは考えないのですか．

A．これは実質的には，空間曲線の研究と一致してくるのです．

練 習 問 題

1. つるまき線 $x_1=a\cos t$, $x_2=a\sin t$, $x_3=bt$ $(a>0, b>0)$ の曲率と捩率は一定であることを示せ．また，逆に曲率と捩率が一定の曲線は何か．
2. 線織面で分配係数 k が 0 となるものは，空間曲線の接線全体または錐面であることを示せ．

答とヒント 1. $s=\sqrt{a^2+b^2}\,t$ で，$k=\dfrac{a}{a^2+b^2}$，$t=\dfrac{b}{a^2+b^2}$，曲率と捩率が一定の曲線は，つるまき線，円，直線に限る．空間曲線の基本定理による．

2. 式(26)で $k=0$ とすると，$a\neq 0$ のときは ads を(17)の ds にとる．$a=0$ のときは錐面．

第8章　動座標系の方法(5)

前回は，3次元ユークリッド空間における動座標系についての基本事項を述べ，これを使って空間曲線および線織面の研究を行なったが，今回は曲面の基本性質をこの方法で調べていくことにする．曲面は点の集合であるが，これは2次元の拡がりをもっているので，その研究には微分形式（相対成分）の外積や外微分がふんだんに使われる．

1. 曲　　面

3次元ユークリッド空間で基本の座標系 R_0 を考え，これに関する位置ベクトルが，

$$A = A(u_1, u_2), \tag{1}$$

直角成分で表わすと，

$$x_i = x_i(u_1, u_2) \quad (i=1, 2, 3) \tag{2}$$

で与えられる点 A の集合を考える．ここで，(u_1, u_2) は平面上の単一連結な領域 D の任意の点で，A はこれに1対1に対応し，関数 $x_i(u_1, u_2)$ は C^∞ 級で，

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_2} & \dfrac{\partial x_3}{\partial u_3} \end{pmatrix} \text{ の階数は2} \tag{3}$$

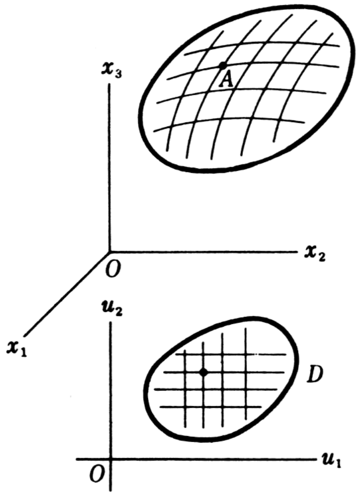


図　1

一般に，
$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$
の階数が2というのは，
$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$ または
$b_1=b_2=b_3=0$ となっていないことに当る．

であるとしておく．こうした点 A の集合を曲面，くわしくは曲面分といい，u_1, u_2 を媒介変数（パラメータ）または曲線座標という．

例．原点を中心とする半径 a の球面は，球面座標 θ, φ を使って，

$$\begin{aligned} x_1 &= a\sin\theta\cos\varphi \\ x_2 &= a\sin\theta\sin\varphi \\ x_3 &= a\cos\theta \end{aligned} \tag{4}$$

と表わすことができる．この場合，θ, φ は媒介変数で，その動く範囲は

$$0<\theta<\pi, \quad 0<\varphi<2\pi \tag{5}$$

とする．このとき，(3) の行列は，

$$\begin{pmatrix} a\cos\theta\cos\varphi & a\cos\theta\sin\varphi & -a\sin\theta \\ -a\sin\theta\sin\varphi & a\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

で階数は2となっている．

Q．いろいろ質問があります．この球面の場合，(5) では $\theta=0$, $\theta=\pi$ にあたる点 $(0,0,a)$, $(0,0,-a)$ や $\varphi=0$ にあたるところがぬけていますね．

A．その通りです．$\varphi=0$ の方は入れて考えても，実質的には支障はありません．ただ，D に領域のへりの一部分を入れるわけですが，(3) は成り立っています．

Q．その (3) の条件ですが，これは何のために要るのですか．

A．それは，すぐあとからわかりますが，これがいわば曲面が2次元の拡がりということを保証するのです．

Q．球面へもどって，点 $(0,0,a)$ や $(0,0,-a)$ をふくめた表わし方はないのですか．

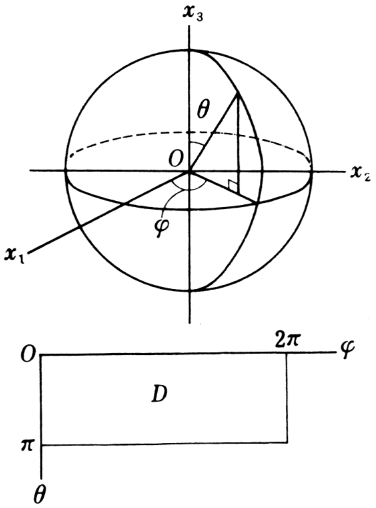


図 2

A．それはひと組の (2) だけではだめです．これできまるものは曲面といっても，実は曲面の切れ端のようなもので，曲面分というのです．これも曲面ですが，一般の曲面はこうしたものをいくつか貼り合わせたものとして定義するのです．

Q．微積分では，曲面を $z=f(x,y)$ という形で習いました．ここの記号でいうと $x_3=f(x_1,x_2)$ ですが，これと (2) の関係はどうなるのですか．

A．それは $x_1=u_1$, $x_2=u_2$, $x_3=f(u_1,u_2)$ と考えれば (2) の特別な場合になるのです．この立場からすれば球面 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=a^2$ は次の6つの曲面分（この場合は半球面）の貼り合わせでできることになります．

$$x_3=\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}\ (x_3\neq 0),\quad x_3=-\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}\ (x_3\neq 0)$$
$$x_1=\sqrt{1-x_2^2-x_3^2}\ (x_1\neq 0),\quad x_1=-\sqrt{1-x_2^2-x_3^2}\ (x_1\neq 0)$$
$$x_2=\sqrt{1-x_3^2-x_1^2}\ (x_2\neq 0),\quad x_2=-\sqrt{1-x_3^2-x_1^2}\ (x_2\neq 0)$$

Q．こうしたことはどんなときに要るのですか．

大域的…global
局所的…local

A．それは曲面全体にわたってのことを考えるときに要るのです．こうしたことを大域的な扱いというのです．ここでは大域的でなく局所的なことを考えますから，曲面分でよいのです．

曲線を扱う場合に基本となるものに接線がある．これに対して，曲面では接平面が大切で，それは次のようにしてきまる．いま，(1) で定まる曲面上で，

$$u_i=u_i(t)\quad (i=1,2) \tag{6}$$

できまる曲線 $A=A(u_1(t),u_2(t))$ を考えると，その接線ベクトルは，

$$\frac{dA}{dt}=\frac{du_1}{dt}\frac{\partial A}{\partial u_1}+\frac{du_2}{dt}\frac{\partial A}{\partial u_2} \tag{7}$$

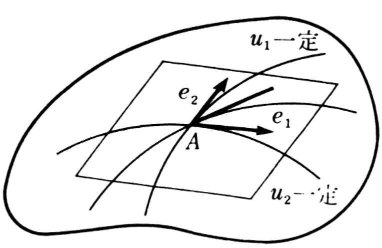


図 3

そこで，点 A を定めて考え，その位置ベクトル A について，

$$e_1=\frac{\partial A}{\partial u_1},\quad e_2=\frac{\partial A}{\partial u_2} \tag{8}$$

e_1 は u_2=一定の曲線の接線ベクトル，e_2 は u_1=一定の曲線の接線ベクトル

とおくと，点 A をとおる任意の曲線の接線は，すべて A からひいた2つのベクトル e_1, e_2 のつくる平面の上にあることが (7) によってわかる．これが点 A での接平面で，この場合，条件 (3) は e_1, e_2 が1次独立なベクトルであることを保証しているのである．

また，曲線上で，1つの点から任意の点へいたる弧の長さの微分は，(7) によって次のように表わされる．

$$\begin{aligned} ds^2 &= (dA, dA) = (du_1e_1+du_2e_2,\ du_1e_1+du_2e_2) \\ &= (e_1, e_1)du_1^2+2(e_1, e_2)du_1du_2+(e_2, e_2)du_2^2 \end{aligned}$$

$du_1\,du_2$ 等は，厳密にいえば $du_1 \otimes du_2$ であるが，略記する．

$e_1=\dfrac{\partial A}{\partial \theta}$，$e_2=\dfrac{\partial A}{\partial \varphi}$

$(e_1, e_1)=a^2$，$(e_2, e_2)=a^2\sin^2\theta$，$(e_1, e_2)=0$

球面 (4) の場合についてこれを計算すれば，

$$ds^2=a^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2) \tag{9}$$

Q．こうしたことは大体知っています．これからどうなるのですか．

A．これくらいの準備で曲面の性質を動座標系の方法で調べていきましょう．

2. 曲面に付随した動座標系

89 ページの (1) の形に表わされた曲面 (曲面分) を考え，その上の各点 A で接平面を作り，これらの接平面上で単位直交系

$$e_1=e_1(u_1, u_2),\ e_2=e_1(u_1, u_2)$$

を u_1, u_2 について C^∞ 級であるようにきめておく．このことは，つねに可能で，たとえば次のようにすればよい．(この e_1, e_2 は (8) のそれとはちがう)．まず，$\partial A/\partial u_1$ は長さが1とは限らないから，これと同じ向きの単位ベクトルを e_1 にとる．つぎに e_1 に垂直な単位ベクトルを接平面上で作って e_2 にするのに，向きのきめ方が2通りあるが，e_2 が u_1, u_2 について連続となるように定めておく．

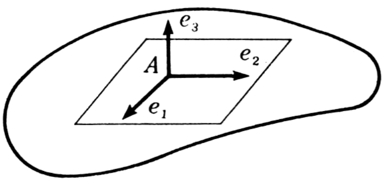


図 4

次に，単位ベクトル e_3 を e_1, e_2, e_3 が右手系になるように定めて，A, e_1, e_2, e_3 できまる座標系 R を作る．そこで，基本の座標系 R_0 に対して，

$$R=PR_0\quad (P \text{ は変位の行列})$$

とし，

$$\Omega=dPP^{-1},\quad dR=\Omega R \tag{10}$$

を考える．これらを成分でかくと，

$$\Omega=\begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ 0 & 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ 0 & -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ 0 & -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{aligned} dA &= \omega_1e_1+\omega_2e_2+\omega_3e_3 \\ de_1 &= \omega_{12}e_2+\omega_{13}e_3 \\ de_2 &= -\omega_{12}e_1+\omega_{23}e_3 \\ de_3 &= -\omega_{13}e_1-\omega_{23}e_2 \end{aligned} \tag{11}$$

また，構造方程式として，

$$d\omega_1=\omega_2\wedge\omega_{21}+\omega_3\wedge\omega_{31},\quad d\omega_2=\omega_1\wedge\omega_{12}+\omega_3\wedge\omega_{32} \tag{12}$$

$$d\omega_3=\omega_1\wedge\omega_{13}+\omega_2\wedge\omega_{23} \tag{13}$$

$$d\omega_{12}=\omega_{13}\wedge\omega_{32},\quad d\omega_{23}=\omega_{21}\wedge\omega_{13},\quad d\omega_{31}=\omega_{32}\wedge\omega_{21} \tag{14}$$

こうしたことはすべて前回詳しく述べたところである．

ところが，いま，e_1, e_2 は接平面上にとってあるので，e_3 は接平面に垂直で，

$$\omega_3=(dA, e_3)=0$$

したがって，(12), (13) は次のようになる．

$$d\omega_1=\omega_2\wedge\omega_{21},\quad d\omega_2=\omega_1\wedge\omega_{12} \tag{15}$$

$$\omega_1\wedge\omega_{13}+\omega_2\wedge\omega_{23}=0 \tag{16}$$

次に，

$$dS=\omega_1\wedge\omega_2 \tag{17}$$

はこの曲面の面積素片になっている．このことは，次のようにして確かめられる．曲面上の任意の点 $A=A^0$ で，ここでの座標系 R_0 を基本にして考え，曲面上の点 A の座標を (x_1, x_2, x_3) とすると，R_0 については $e_1=(1,0,0)$，$e_2=(0,1,0)$ であることから，A^0 においては，

$$\omega_1=(dA, e_1)=dx_1,\quad \omega_2=(dA, e_2)=dx_2$$

したがって，A^0 においては，

$$\omega_1\wedge\omega_2=dx_1\wedge dx_2$$

他方，$R_0=(A^0, e_1{}^0, e_2{}^0)$ においては $e_1{}^0, e_2{}^0$ が接平面の上にあるから $dx_1\wedge dx_2$ はこの点の面積素片になっている．これで (17) がわかった．

$\omega_1, \omega_2, \omega_{12}, \omega_{23}, \omega_{31}$ はすべて媒介変数 u_1, u_2 についての1次微分式である．そして，(17) によると ω_1, ω_2 は du_1, du_2 の1次式として1次独立である．そこで，

$$\omega_{13}=a\omega_1+b\omega_2,\quad \omega_{23}=b'\omega_1+c\omega_2$$

とおくことができる．ここで，a, b, b', c は u_1, u_2 の関数である．これを (16) に代入すると，

$$(b-b')\omega_1\wedge\omega_2=0 \quad \text{したがって}\quad b=b'.$$

こうして得られた曲面の研究の基本をまとめておこう．

$$\begin{array}{ll}
dA=\omega_1e_1+\omega_2e_2 & ds^2=\omega_1{}^2+\omega_2{}^2 \\
de_1=\qquad\quad \omega_{12}e_2+\omega_{13}e_3 & \omega_{13}=a\omega_1+b\omega_2 \\
de_2=-\omega_{12}e_1\qquad +\omega_{23}e_3 & \omega_{23}=b\omega_1+c\omega_2 \\
de_3=-\omega_{13}e_1-\omega_{23}e_2 & \\
\quad d\omega_1=\omega_2\wedge\omega_{21},\quad d\omega_2=\omega_1\wedge\omega_{12} & \\
\quad d\omega_{12}=\omega_{13}\wedge\omega_{32}=-(ac-b^2)\omega_1\wedge\omega_2 & \\
\quad d\omega_{13}=\omega_{12}\wedge\omega_{23},\quad d\omega_{23}=\omega_{21}\wedge\omega_{13} &
\end{array} \tag{18}$$

Q．構造方程式が働らき出しましたね．

A．その通りです．そこでまず曲率のことをお話しします．

3. 曲面の曲率

平面上の曲線について，その曲りぐあいを表わすものが曲率である．これを曲面について考えるのであるが，その場合手懸りとなるのは，曲面上の曲線の

曲率である．曲面上の任意の点 A を固定して考えて A^0 とし，ここでの座標系 $A^0, e_1{}^0, e_2{}^0, e_3{}^0$ を基本の R_0 にとって考える．A^0 を通るこの曲面上の曲線 c について，A^0 から c 上の点 A に至る弧の長さを s としてこれを c 上の点の媒介変数にとって $A=A(s)$ を考えると，

$$A=A(s)=A(0)+\left(\frac{dA}{ds}\right)_0 s+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2A}{ds^2}\right)_0 s^2+O(s^3) \qquad (19)$$

関数ベクトルのテーラー展開

ここで，括弧の外に0をつけたのは，$s=0$ とおいたものであることを示している．この場合，(18)から

$$\frac{dA}{ds}=\frac{\omega_1}{ds}e_1+\frac{\omega_2}{ds}e_2$$

$$\frac{d^2A}{ds^2}=\frac{d}{ds}\left(\frac{dA}{ds}\right)=\frac{d}{ds}\left(\frac{\omega_1}{ds}\right)e_1+\frac{d}{ds}\left(\frac{\omega_2}{ds}\right)e_2+\frac{\omega_1}{ds}\frac{de_1}{ds}+\frac{\omega_2}{ds}\frac{de_2}{ds}$$

$$=(\cdots)e_1+(\cdots)e_2+\frac{\omega_1\omega_{13}+\omega_2\omega_{23}}{ds^2}e_3$$

$\frac{\omega_i}{ds}=\omega_i\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)$

そこで，曲線 c を A^0 と $e_3{}^0$ をふくむ任意の平面 N と曲面との切り口にとって，N 上で A^0 を原点，接平面上に x_1 軸，$e_3{}^0$ 上に x_3 軸をとって考えると，$A=A(s)$ の座標は，

$$x_1=s+O(s^2),\quad x_3=\frac{1}{2}ks^2+O(s^3)$$

となる．ここで，

$$k=\left(\frac{\omega_1\omega_{13}+\omega_2\omega_{23}}{(ds)^2}\right)_0 \qquad (20)$$

そして，k は A^0 での曲線 c の曲率になっている．

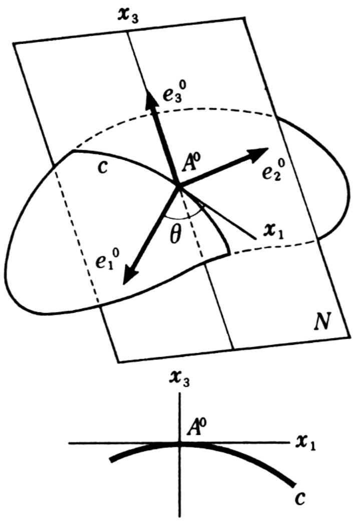


図　5

一般に $x_3=f(x_1)$ で $f(0)=0$, $f'(0)=0$ のとき，$x_1=0$ での曲率は $f''(0)$ となる．

そこで，(18)によると，

$$Q=\omega_1\omega_{13}+\omega_2\omega_{23}$$
$$=a\omega_1{}^2+2b\omega_1\omega_2+c\omega_2{}^2 \qquad (21)$$

である．これについて調べてみよう．

いま，A, e_1, e_2, e_3 からできる座標系 R の代わりに，これを e_3 軸のまわりに角 α だけまわしてできる座標系を $\bar{R}=UR$ とし，

$$d\bar{R}=\bar{\Omega}\bar{R}$$

とおくと，これまでたびたび述べてきたように，

$$\bar{\Omega}=U\Omega U^{-1}+dUU^{-1}$$

これを成分でかいて，

$$U=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\qquad \Omega=\begin{pmatrix}0 & \omega_1 & \omega_2 & 0\\ 0 & 0 & \omega_{12} & \omega_{13}\\ 0 & -\omega_{12} & 0 & \omega_{23}\\ 0 & -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0\end{pmatrix}$$

$\bar{\Omega}$ についても同様に表わすと，

$$\bar{\omega}_1=\omega_1\cos\alpha+\omega_2\sin\alpha,\quad \bar{\omega}_{13}=\omega_{13}\cos\alpha+\omega_{23}\sin\alpha,\quad \bar{\omega}_{12}=\omega_{12}+d\alpha$$
$$\bar{\omega}_2=-\omega_1\sin\alpha+\omega_2\cos\alpha,\quad \bar{\omega}_{23}=-\omega_{13}\sin\alpha+\omega_{23}\cos\alpha \tag{22}$$

したがって，(21)の Q そのものは $R, \bar{R}$ について同一であるが，角 α，つまり $\bar{R}$ を適当にとれば，$\bar{a}\bar{\omega}_1^2+\bar{c}\bar{\omega}_2^2$ の形となって，$\bar{b}=0$ にとれる．このような $\bar{R}$ を考えて，今後これを R で表わすことにする．そうすると，

ω_1, ω_2 の変換は直交変換，Q は ω_1, ω_2 の2次形式である．

$$Q=k_1\omega_1^2+k_2\omega_2^2 \tag{23}$$

とおくことがでさる．

いま，点 A^0 でこのことを考え，曲線 c の接線が e_1^0 軸となす角を θ とすると，

$$\frac{dA}{ds}=\frac{\omega_1}{ds}e_1+\frac{\omega_2}{ds}e_2$$

であることによって，

$$\left(\frac{\omega_1}{ds}\right)_0=\cos\theta,\quad \left(\frac{\omega_2}{ds}\right)_0=\sin\theta$$

したがって，A^0 での k_1, k_2 の値も同じ記号で表わすことにすると，(20) は

$$k=k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta$$

となる．これは，平面 N による切り口の曲線 c の A^0 での曲率を表わす式である．いま，$k_1>k_2$ として，平面 N を e_3^0 軸をもとにして回転すると，k は，$\theta=0$ のとき最大値 k_1，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最小値 k_2 をとることがわかる．$k_1=k_2$ ならば，k はつねに一定である．

この k_1, k_2 を点 A^0 での主曲率といい，このときの e_1^0, e_2^0 の方向を曲面の主方向という．また，$k_1=k_2$ である点は臍点という．このときは主方向は定まらない．さらにまた，

臍点（へそてん，せいてん） umbilic

$$H=\frac{1}{2}(k_1+k_2) \text{ を平均曲率，} K=k_1k_2 \text{ をガウスの曲率}$$

という．この2つが，曲面の研究において極めて重要である．

Q．ここでの話は，点 A^0 でのことですが，A^0 というのは任意の点でよかったのですね．

A．その通りです．

Q．曲面の曲率というのは何をいうのですか．

A．一般には，上の k_1, k_2, H, K などを考えるので，そのどれを曲面の曲率というかということはないのですが，K が一定の曲面では，これを定曲率の曲面ということがあります．

Q．$k_1=k_2$ のときは臍点ということでしたが，どんな例がありますか．

A．球面上の点はすべてそうです．また，回転楕円面などでは軸の両端がそうなっています．

Q．H や K は重要だといわれましたが，たとえばどんなところに出てくるのですか．

A．たとえば，針金で空間曲線のわくを作ってこれを石けん液にひたして静かに取り出しますと，そこへ曲面の膜が張られています．これは，表面張力の原理から面積がなるべく小さくなろうとしてできたもので，極小曲面といわ

れるものですが，この曲面ではつねに $H=0$ です．ここでは証明はしませんが，そう難しいことではありません．

Q．K の方はどうですか．

A．$K>0$ の点は楕円点，$K<0$ の点は双曲点，$K=0$ の点は放物点といいます．一般の曲面には，これらの点が入りまじっているわけですが，凸の曲面では双曲点がないのです．

K は，幾何学において最も重要なものの1つで，このことをいまからお話しします．

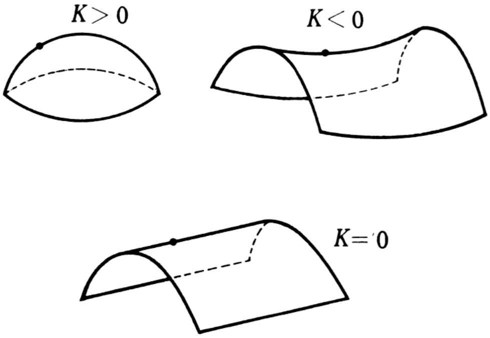


図 6

4. ガウスの曲率と等長変形

ガウスの曲率 $K=k_1k_2$ は，(23) を参照すれば ω_1, ω_2 の2次形式 Q の固有値の積であって，(21) の場合には，$K=ac-b^2$ となる．したがって (18) によると，

$$\omega_{13}\wedge\omega_{23}=K\omega_1\wedge\omega_2 \tag{24}$$

$$-d\omega_{12}=K\omega_1\wedge\omega_2 \tag{25}$$

となる．これらの式から導かれることを示そう．

まず，(24) を考える．いま，原点からベクトル e_3 をひくと，曲面上の各点 A について単位球面上の点が定まり，曲面上の領域 D に対して球面上の領域 $\varDelta$ がきまる．この場合，

$$de_3=-\omega_{13}e_1-\omega_{23}e_2$$

であって e_1, e_2 はこの球面の接平面に平行であることから，

$$d\sigma=\omega_{13}\wedge\omega_{23}$$

はこの単位球面上の領域 $\varDelta$ の面積素片であり，

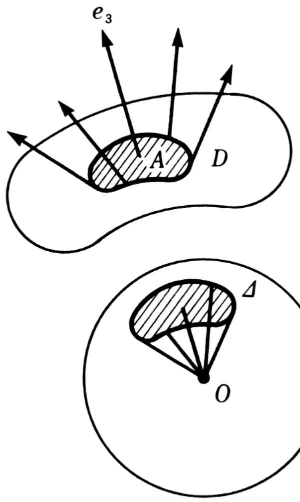


図 7

$dS=\omega_1\wedge\omega_2$ はもとの曲面上の領域 D の面積素片であって，(24)は

$$d\sigma=KdS$$

であることを示している．したがって，D を曲面上で1つの点 A に収縮させるとき，

$$K=\lim\frac{\varDelta\text{ の面積}}{D\text{ の面積}} \tag{26}$$

となっている．これがガウスの曲率の1つの意味である．

Q．なるほど，そういうわけでしたか．何か平面曲線の曲率の場合と似たような解釈が出てきましたね．

A．そうです．ちょっと比較してごらんなさい．

Q．平面曲線で，その上の任意の点での法線単位ベクトル e_2 を考え，定点か

ら曲線の各点に対して e_2 をひきますと単位円ができます．もとの曲線の弧で長さ Δs の部分に対する単位円上の弧の長さを $\Delta\theta$ としますと，曲線上の弧を１点 A に近づけるとき，

$$\lim\frac{\Delta\theta}{\Delta s}$$

がこの点 A での曲率です．ふつうは接線で考えますが，$\Delta\theta$ は法線で考えても同じです．これで(26)との関係がよくわかりますね．

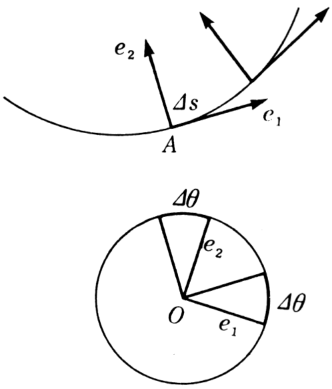


図 8

A．その通りです．次に(25)を考えましょう．これからはまた，大変な結果が導かれます．

次に(25)によると，

ガウスの曲率は弧の長さの微分 ds だけで定まる

ことが，次のようにしてわかる．まず，

$$ds^2=\omega_1{}^2+\omega_2{}^2 \tag{27}$$

であるが，はじめに，ω_1, ω_2 が与えられれば，K が一通りに定まることを示そう．$\omega_1\wedge\omega_2\neq 0$ であるから，$\omega_{12}=p\omega_1+q\omega_2$ とおくことができる．したがって，

$$d\omega_1=\omega_2\wedge\omega_{21}=-\omega_2\wedge\omega_{12}, \qquad d\omega_2=\omega_1\wedge\omega_{12}$$

から，

$$d\omega_1=p\omega_1\wedge\omega_2, \qquad d\omega_2=q\omega_1\wedge\omega_2 \tag{28}$$

ω_1, ω_2 が与えられているから，これで，p, q が定まり，ω_{12} が定まり，(25)によって K が定まる．

次に，ds^2 を(27)の形に表わすのに，e_1, e_2 軸を角 α だけ回転した $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ をとっても K の値は変わらないことは，(26)の意味から考えても明らかである．

上に示した K のきめ方は，実際に K の値を求めるのに役立つ．

例．半径 a の球面についての線素の式(9)

$$ds^2=a^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)$$

について，

$$\omega_1=ad\theta, \quad \omega_2=a\sin\theta d\varphi$$

このとき，

$$d\omega_1=0,\ d\omega_2=a\cos\theta d\theta\wedge d\varphi, \qquad \omega_1\wedge\omega_2=a^2\sin\theta d\theta\wedge d\varphi$$

(28)によって，

$$p=0, \quad q=\frac{1}{a}\cot\theta d\varphi$$

したがって，

$$\omega_{12}=\cos\theta d\varphi, \quad d\omega_{12}=-\sin\theta d\theta\wedge d\varphi$$

(25)によって，

$$K=\frac{1}{a^2}$$

Q．なるほど，よくわかりました．こうした方法で ds^2 がわかると ω_1, ω_2 を使って K が計算できるのですね．ところで，曲面が与えられていれば ds^2

がきまるわけですが，逆に ds^2 から曲面がきまるのでしょうか．

A．そうはいきません．実は，ds^2 と (21) の Q が u_1, u_2 の関数として与えられていると曲面はきまるのです．

Q．勝手に与えてよいのですか．

A．そうはいきません．ちょっと複雑なある種の条件が要るのです．こうしたことを扱うのには，まだ準備不足です．

Q．そうしますと，ds^2 が同じで形のちがった曲面というものがあるのですね．

A．そうです．いくらでもあるのです．現に平たい紙をまげると柱面，錐面などいろいろの形になりますが ds^2 は変わりません．こうして次のことがいえるのです．

2つの曲面 S, S' があって，これらを点の集合とみると1対1の対応をしていて，対応する曲線の長さがつねに同じのとき，S と S' は等長対応をしているという．このときは，S, S' の対応する点を同じ媒介変数で表わすと ds^2 は同じになる．したがって，

等長…isometric

> 等長対応をしている2つの曲面では，対応点でのガウスの曲率 K は同じである

といえる．つまり，曲面をその上の線の長さが変わらないように変形してもガウスの曲率が変わらないのである．これはガウスによる偉大な発見である．

5. 測　地　線

測地線…geodesic

曲面の上で，2点 P_1, P_2 を結ぶ線の中で長さの最も短いものは測地線と呼ばれている．これを考えてみよう．まず，P_1, P_2 を結ぶ曲線の集まりで1つの径数（パラメータ）ε をもったもの $c(\varepsilon)$ を考え，その上では，

$$u_i = u_i(s, \varepsilon) \quad (i=1,2) \tag{29}$$

で与えられているとする．ここで，$\varepsilon=0$ の場合が測地線で，s はその上では弧の長さを表わすものとする．さらに，どの曲線についても，

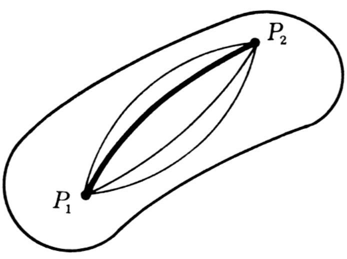


図　9

$$P_i \text{ では } s=s_i \ (i=1,2), \quad s_1<s_2$$

としておく．このとき，曲線 $c(\varepsilon)$ についての弧 P_1P_2 の長さを L とすると，

$c(\varepsilon)$，$\varepsilon \neq 0$ の上では s は一般には弧の長さではない．

$$L=L(\varepsilon)=\int(\omega_1^2+\omega_2^2)^{\frac{1}{2}}=\int_{s_1}^{s_2}\left(\left(\frac{\omega_1}{ds}\right)^2+\left(\frac{\omega_2}{ds}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}ds$$

$c(0)$ が測地線であることから，

$$\left(\frac{\partial L}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}=0,\ \text{したがって}\ \int_{s_1}^{s_2}\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\left(\frac{\omega_1}{ds}\right)^2+\left(\frac{\omega_2}{ds}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)_{\varepsilon=0}ds=0$$

ここで，

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\left(\frac{\omega_1}{ds}\right)^2+\left(\frac{\omega_2}{ds}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\left(\frac{\omega_1}{ds}\right)^2+\left(\frac{\omega_2}{ds}\right)^2\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\omega_1}{ds}\right)^2+\left(\frac{\omega_2}{ds}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$\varepsilon=0$ では $\omega_1^2+\omega_2^2=(ds)^2$ になっていることから，

$$\int_{s_1}^{s_2}\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\left(\frac{\omega_1}{ds}\right)^2+\left(\frac{\omega_2}{ds}\right)^2\right)\right)_{\varepsilon=0}ds=0$$

そこで，$X=\frac{\partial}{\partial s}$ とおくと，$\frac{\omega_i}{ds}=\omega_i(X)$ $(i=1,2)$ だから，この式は次のようにかくことができる．

$$\int_{s_1}^{s_2}\left(\omega_1(X)\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\omega_1(X)+\omega_2(X)\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\omega_2(X)\right)_{\varepsilon=0}ds=0 \tag{30}$$

ここで構造方程式 $d\omega_1=\omega_2\wedge\omega_{12}=-\omega_2\wedge\omega_{12}$，$d\omega_2=\omega_1\wedge\omega_{12}$ を考える．

$Y=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}$ とおくと，$[X,Y]=0$ であることから，

$$d\omega_1(X,Y)=\frac{1}{2}(X\omega_1(Y)-Y\omega_1(X))$$

一般に，
$\omega=\sum_i a_i dx_i$
$T=\frac{\partial}{\partial t}$ のとき，
$\omega(T)=\sum_i a_i\frac{dx_i}{dt}$

また，$(-\omega_2\wedge\omega_{12})(X,Y)=-\frac{1}{2}(\omega_2(X)\omega_{12}(Y)-\omega_2(Y)\omega_{12}(X))$

だから，この2つの式の等しいことから，

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\omega_1(X)=\frac{\partial}{\partial s}\omega_1(Y)+\omega_2(X)\omega_{12}(Y)-\omega_2(Y)\omega_{12}(X)$$

同様に，

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\omega_2(X)=\frac{\partial}{\partial s}\omega_2(Y)-\omega_1(X)\omega_{12}(Y)+\omega_1(Y)\omega_{12}(X)$$

これらを(30)に代入する．その場合，部分積分法によって

$$\int_{s_1}^{s_2}\omega_i(X)\frac{\partial}{\partial s}\omega_i(Y)ds=[\omega_i(X)\,\omega_i(Y)]_{s_1}^{s_2}-\int_{s_1}^{s_2}\frac{\partial}{\partial s}\omega_i(X)\cdot\omega_i(Y)ds$$

であることと，$s=s_i$ $(i=1,2)$ では $\omega_i(Y)=0$ であることとを使うと，

$$-\int_{s_1}^{s_2}(Q_1\omega_1(Y)+Q_2\omega_2(Y))_{\varepsilon=0}\,ds=0$$

ここに，

$$Q_1=\frac{\partial}{\partial s}\omega_1(X)+\omega_2(X)\omega_{21}(X),\quad Q_2=\frac{\partial}{\partial s}\omega_2(X)+\omega_1(X)\omega_{12}(X)$$

(29)の曲線の集まりのとり方はいろいろあって，$(\omega_i(Y))_{\varepsilon=0}$ の値は勝手にとれるから，結局，

$$(Q_i)_{\varepsilon=0}=0$$

たとえば，
$u_i=u_i(s)+\varepsilon\varphi_i(s)$
$(i=1,2)$
$\varphi_i(s)$ は $s=s_1, s_2$ で0となる条件の下で任意にとれる．そして，
$\omega_i=p_i du_1+q_i du_2$
は1次独立だから
$\omega_i(Y)=p_i\varphi_1+q_i\varphi_2$
は $\varepsilon=0$ で任意の値をとる．

となる．このことは，測地線に沿っては，

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\omega_1}{ds}\right)+\frac{\omega_2}{ds}\frac{\omega_{21}}{ds}=0,\quad \frac{d}{ds}\left(\frac{\omega_2}{ds}\right)+\frac{\omega_1}{ds}\frac{\omega_{12}}{ds}=0 \tag{31}$$

となっていることを示している．ここで，s はこの測地線上の弧の長さである．

Q．どうもあまりわかりませんが．

A．それは，ここの説明も簡潔ですが，何といっても微分式と X,Y との扱いがよくわかっていないことが重な理由でしょう．この講座の第3章微分形式の計算でお話ししたところを一度復習して下さい．

Q．ところで，測地線については(31)の成り立つことがわかりましたが，逆にこれから測地線が求められるのですか．

A．この微分方程式の解として得られる曲線 c では，その上の十分近い2点 P_1, P_2 について，P_1, P_2 を結ぶ曲面上の曲線の中で，c の弧が最短のものであることは証明できるのですが，証明はそう簡単ではありません．P_1, P_2

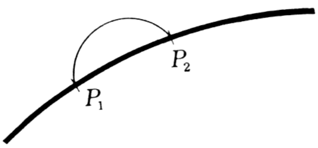


図 10

が十分近くないときは，このことは保証されません．たとえば，球面上では(31)の解として得られる線は大円の弧であることは証明できますが，P_1, P_2 が大円の優弧の両端ですと，この弧は最短距離を与えません．

Q．それでは測地線とはいわないのですか．

A．いや，一般には(31)の解として得られるものを測地線というので，これは部分的にははじめの意味での測地線になっているわけです．

Q．曲面上の測地線は平面上の直線に当るものといえますね．そうした点から大切なものなのではありませんか．

A．その通りです．たとえば，曲面を測地線に沿って平面上に転がしていきますと接点の軌跡は直線になってきます．また，測地線を空間曲線とみるときの主法線は曲面自身の法線になっています．さらに，非常に重要な定理としては，測地線を辺にもつ三角形 ABC で，3つの頂角の大きさを A, B, C としますと，

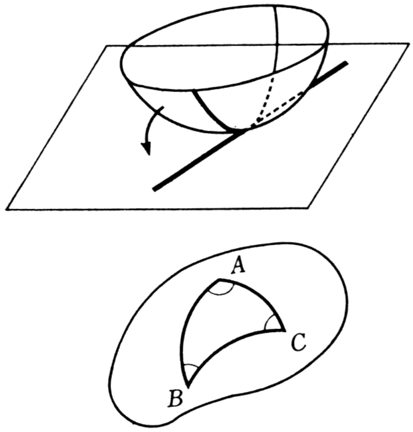


図 11

$$A+B+C-\pi=\int KdS, \qquad (32)$$

ガウス・ボンネの定理

ここで，K はガウスの曲率，ds は曲面の面積素片，積分はこの三角形の内部にわたるものです．

Q．球面の場合にこれに当ることをならったことがあります．右辺が S/a^2 (S は球面三角形の面積，a は半径）でした．そうしますと(32)は大変重要な定理と思われます．

A．証明は，動座標系の方法のよい応用例ですが，ここでは割愛します．

練　習　問　題

1.　直角座標で考えた曲面 $x_3=a_1x_1^2+a_2x_2^2$ の原点での主曲率を求めよ．

2.　直角座標が $x_1=0$, $x_2=g(u)$, $x_3=f(u)$ (u は弧の長さ）で与えられる曲線を x_2 軸のまわりに1回転してできる曲面について，

$$ds^2=du^2+f^2d\theta^2$$

(θ は回転角)

であることを示し，この曲面のガウスの曲率 K を求めよ．とくに，K が一定である場合をしらべよ．

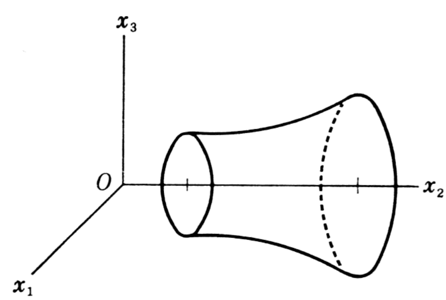


図 12

3.　球面上で，測地線は大円の弧であることを示せ．

答とヒント　1.　$k_1=2a_1$, $k_2=2a_2$ 94ページの考えで容易にわかる．

2.　曲面は $x_1=f(u)\cos\theta$, $x_2=g(u)$, $x_3=f(u)\sin\theta$, $ds^2=dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2$ による．$K=-f''/f$, $K=0$ のとき $f=au+b$, $K=c^2$ のとき $f=k\sin(cu+b)$, $K=-c^2$ のとき $f=Ae^{cu}+Be^{-cu}$, g は $f'^2+g'^2=1$ から求める．

3.　$ds^2=a^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)$ で，2点を $\theta=0$ の点と，$\theta=\theta_1$, $\varphi=0$ の点にとって考えればすぐにわかる．

第9章　リーマン空間

今回は，動座標系の方法によるユークリッド空間の微分幾何の研究に準拠して，リーマン空間を扱ってみよう．リーマン空間の研究には，大別して，

・テンソルの徹底的な駆使による方法

・動座標系の考えによる方法

・なるべく成分を使わない近代的な手法

の3つがあるが，これらには，それぞれ長所と短所があり，また，たがいに相反するものでなく，むしろ融合して利用していくところに妙味がある．しかし，リーマン空間に入っていく段階としては，かなりちがっている．動座標系の考えで扱うときは，微分形式が基本的な役割りをする．ここでは，これを概説することにしよう．

1. リーマン空間の定義

まず，n 次元の空間を考える．これは，その各点が n 個の実数の順序を考えた組 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ で，その変域はこのようなものの全体，または部分集合とし，M とかく．ただし，部分集合のときは，各点 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が

つまり，M は R^n またはその中の開集合

$$\{(y_1, y_2, \cdots, y_n) \mid |y_i - x_i| < \varepsilon,\ i=1, 2, \cdots, n\}$$

であるような M に属する集合(近傍)をもっているとする．

局所多様体

このとき，各点できまる

$$g_{ij} = g_{ij}(x) = g_{ij}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \qquad (i, j=1, 2, \cdots, n)$$

関数はすべて C^∞ 級としておく．

があって，

正定符号とは，$(X_1, \cdots, X_n) \neq (0, \cdots, 0)$ である限り正となること

$$g_{ij} = g_{ji}, \qquad 2\text{次形式}\ \sum_{i,j} g_{ij} X_i X_j \ \text{は正定符号} \tag{1}$$

としておく．そうすると，M の中の

$$x_i = x_i(t) \qquad (t_1 \leqq t \leqq t_2,\ i=1, 2, \cdots, n) \tag{2}$$

で与えられる曲線の弧について，その長さを

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sum_{ij} g_{ij} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt}}\ dt \tag{3}$$

で定義することができる．この g_{ij} の与えられた空間 M をリーマン空間という．

Q．いろいろと質問があります．まず，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ は点の座標というわけですね．しかし，別に直角座標とか，デカルト座標というわけでもないのですから，別の座標を使ってもよいでしょう．そのときはどうなるのですか．

$x_1, \cdots, x_n$ は，いわゆる曲線座標

A．それが基本的なことです．いま，

$$y_i=\varphi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

できまる別の座標 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ を使うとすれば，その逆の変換

$$x_i=\psi_i(y_1, y_2, \cdots, y_n) \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

をも考えて，g_{ij} の代わりに

$$h_{ij}=h_{ij}(y)=\sum_{hk} g_{hk} \frac{\partial x_h}{\partial y_i} \frac{\partial x_k}{\partial y_j} \qquad (i, j=1, 2, \cdots, n) \qquad (4)$$

できまる h_{ij} を考えると，曲線 (2) について，

$$\sum_{ij} h_{ij} \frac{dy_i}{dt} \frac{dy_j}{dt}=\sum_{hk} g_{hk} \frac{dx_h}{dt} \frac{dx_k}{dt}$$

となって，(3) できまる弧の長さが同じになってきます．ですから，座標 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に関して (g_{ij}) できまるリーマン空間と，座標 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ に関して (h_{ij}) できまるリーマン空間とは，同じものと考えるのです．

Q．これは，ずっと前に伺ったテンソルというものと関連があるのではありませんか．

A．そうです．(g_{ij}) は，テンソルそのものです．

詳しくいえば，(g_{ij}) は2階の対称共変テンソル

Q．それでは，どうして始めからそれを言われなかったのですか．

A．大分前のことですから，少し遠慮をしたのです．しかし，どの途，こうしたことを全く避けて通るわけには行きませんね．次に接空間と，双対接空間のことを復習します．詳しいことは，前のところを見て下さい．

この講座の第2章

空間 M の任意の点 x を固定して考え，そこで，$X_i=\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ を基とするベクトル $\sum_i a_i X_i$ を接ベクトルといい，その全体を点 x での接空間という．また，この点 x で，接空間の双対ベクトル空間を考え，X_i に双対的な基底を dx_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ とし，$\sum_i b_i dx_i$ を双対接ベクトルという．

つぎに，M の各点 x での接空間，双対接空間に，それぞれ1つずつのベクトルが与えられているとき，これらは，

$$X=\sum_i a_i(x_1, \cdots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad \omega=\sum_i b_i(x_1, \cdots, x_n) dx_i$$

と表わされる．X は1次微分演算子，ω は1次微分形式であるが，ベクトルの言葉でいえば，それぞれ反変ベクトル場，共変ベクトル場である．

また，2階のテンソル場としては，

$$\sum_{ij} a_{ij}(x_1, \cdots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes \frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad \sum_{ij} b_{ij}(x_1, \cdots, x_n) dx_i \otimes dx_j$$

$$\sum_{ij} c_{ij}(x_1, \cdots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes dx_j$$

テンソル計算の記法では，x_i を x^i，a_{ij} を a^{ij}，c_{ij} を c_j^i とかく．

が考えられる．リーマン空間は (1) をみたすベクトル場

$$\sum_{ij} g_{ij}(x_1, \cdots, x_n) dx_i \otimes dx_j$$

の与えられた空間であるといえる．

Q．大分しっかり前のことを復習しなければなりません．そうしないと，これからのお話はわからないのでしょうか．

A．それは望ましいことですが，以後，微分形式とその計算法さえわかれば，大体のことはわかるようにお話ししていくつもりです．

Q．ところで，もう１つ質問があります．ここでのお話では，M の全体が１つの座標系 $(x_1, \cdots, x_n)$ ですべて表わされているのですが，そうでないときのことは考えなくてよいのですか．たとえば，３次元ユークリッド空間の球面 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ は２次元の空間になると思いますが，その上のすべての点を１つの座標系で覆うことはできないことを前に伺いました．

A．それは，非常に大切なことです．その意味では，ここのリーマン空間というのは，局所的なリーマン空間です．一般のリーマン空間というのは，こうしたものをつなぎ合わせたもので，それは次のように定義されます．

局所的…local

位相空間 M があって，これが開集合の集合 $\{U_\alpha\}$ で覆われていて，各 U_α は R^n の開集合と同相とする．この対応を φ_α とし，U_α の点 p について，

$$\varphi_\alpha(p)=(x_1, x_2, \cdots, x_n) \qquad (5)$$

とする．いま，点 p をふくむ $\{U_\alpha\}$ に属する集合 U_α, U_β と，上のようにきまる $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ があって，(5) の他に

$$\varphi_\beta(p)=(y_1, y_2, \cdots, y_n) \qquad (6)$$

となっていたとすると，$U_\alpha \cap U_\beta$ の点 p については２組の座標 (5) (6) がきまるわけであるが，

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \rightleftarrows (y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

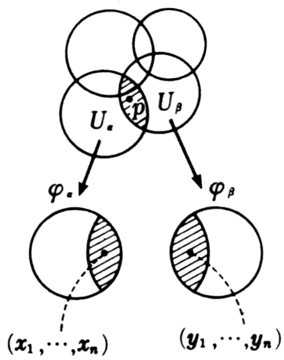


図 1

という対応が，１対１，C^∞ 級となっているとする．このような位相空間 M を微分多様体という．そして，ちがった座標系については，(4) で結ばれた $(g_{ij}), (h_{ij})$ が与えられているのが，一般のリーマン空間です．

Q．そうしますと，リーマン空間というのと，リーマン多様体というのは同じですか．

A．そうです．リーマン面というのはちがいますが．

Q．一般のリーマン空間のことも，これからお話しして下さるのですか．

リーマン面は複素関数論ででてくるもので２次元

A．いや，ここでは，局所的のことに止めます．次に例を挙げておきましょう．

例 1．n 次元のユークリッド空間というのは，R^n で２点 $(p_1, p_2, \cdots, p_n)$，$(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ の間の距離が $\sqrt{(p_1-q_1)^2+(p_2-q_2)^2+\cdots+(p_n-q_n)^2}$ で与えられている場合である．このとき，曲線 $x_i=x_i(t)$ $(t_1 \leqq t \leqq t_2,\ i=1, 2, \cdots, n)$ の弧の長さが２次元，３次元の場合と同じように定義され，それは，

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2}\, dt \qquad (7)$$

によって計算されることがわかっている．したがって，ユークリッド空間は，直角座標 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ について，

$$g_{ij}=\delta_{ij}$$

$\delta_{ij}=\begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$

となっているリーマン空間と考えられる．

例 2．$n+1$ 次元のユークリッド空間で直角座標を $X_1, X_2, \cdots, X_{n+1}$ とし，

$$X_k=f_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) \qquad (k=1, 2, \cdots, n+1) \qquad (8)$$

関数は C^∞ 級

できまる点 $(X_1, X_2, \cdots, X_{n+1})$ の集合 M を考える．ここで，関数行列について，

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial X_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial X_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial X_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial X_{n+1}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial X_{n+1}}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial X_{n+1}}{\partial x_n} \end{pmatrix} \text{の階数は } n \qquad (9)$$

とし，$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の変域は R^n の開集合とする．この M は，$n+1$ 次元のユークリッド空間の超曲面といわれる．そして，その上の曲線 $X_k=X_k(t)$ $(t_1 \leqq t \leqq t_2,\ k=1, 2, \cdots, n+1)$ の弧の長さを (7) によって求めると，

超曲面… hypersurface

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sum_k \left(\frac{dX_k}{dt}\right)^2}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sum_{ij} g_{ij} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt}}\, dt$$

の形になる．ここで，

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \qquad (i, j=1, 2, \cdots, n) \qquad (10)$$

(9) のことから，2次形式 $\sum_{ij} g_{ij} Y_i Y_j$ は正定符号であることが導かれるので，(8) で与えられる超曲面 M は $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を座標とし，(10) による (g_{ij}) できまるリーマン空間と考えられる．

Q．これは3次元空間の曲面の一般化ですね．これが一般のリーマン空間になるのですか．

A．いや，そうではありません．極めて特殊なものです．もっと他に，いろいろなリーマン空間があります．しかし，この超曲面できまるリーマン空間というものは，やはり重要なものです．ことに，これからお話しすることでは，前回に述べた3次元ユークリッド空間の曲面の動座標系の方法による扱いが基本となります．その要点を次に復習します．

2. 曲面の展開

3次元のユークリッド空間で直角座標 X_1, X_2, X_3 について，

$$X_k = f_k(x_1, x_2) \qquad (k=1, 2, 3)$$

で与えられる曲面を考え，その上の点 A での接平面上に単位直交系 e_1, e_2 をとり，e_1, e_2 も x_1, x_2 について C^∞ 級であるようにする．e_1, e_2, e_3 が右手系の単位直交系になるように e_3 をとると，

$$\begin{aligned} dA &= \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 \\ de_1 &= \qquad\quad \omega_{12} e_2 + \omega_{13} e_3 \\ de_2 &= -\omega_{12} e_1 \qquad + \omega_{23} e_3 \\ de_3 &= -\omega_{13} e_1 - \omega_{23} e_2 \end{aligned} \qquad (11)$$

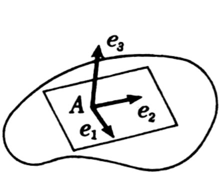


図 2

とおける．そして，

$$d\omega_1 = -\omega_2 \wedge \omega_{12}, \qquad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12} \qquad (12)$$

$$d\omega_{12} = -\omega_{13} \wedge \omega_{23}$$

$$d\omega_{13} = \omega_{12} \wedge \omega_{23}, \qquad d\omega_{23} = -\omega_{12} \wedge \omega_{13} \qquad (13)$$

さらに，この曲面の点 A でのガウスの曲率を K とすると，

$$d\omega_{12} = -K \omega_1 \wedge \omega_2 \qquad (14)$$

そこで，この曲面上に $x_i = x_i(t)$ $(i=1, 2)$ で与えられる曲線 c を考え，これを，

1つの平面の上へひろげる（展開する）

ことを考える．それは次のようなことである．いま，c 上の点 A と，これに近い点 $A+\Delta A$ をとり，この点とそこでの接平面上の単位直交系のベクトル $e_1+\Delta e_1, e_2+\Delta e_2$ を，A での接平面上へ正射影する．この操作は，曲線 c の A の近くを A での接平面上へひろげることであると考えられる．こうしたことを，もっと精密に理論的に述べると，次のようになる．

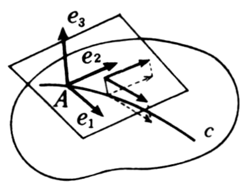


図　3

曲線 c に沿っては，

$$\omega_i=a_i(t)dt, \quad \omega_{ij}=a_{ij}(t)dt$$

のようになっている．そこで，(11) で e_3 のところを省いた式

$$dA=\omega_1 e_1+\omega_2 e_2, \quad de_1=\omega_{12}e_2, \quad de_2=-\omega_{12}e_1 \tag{15}$$

を考える．ここで，A, e_1, e_2 は未知の関数ベクトルで，これらの式はそれについての微分方程式と考えられる．いま，曲線 c 上で $t=t_1, t=t_2$ の点 A_1, A_2 をとり，C は任意の定ベクトル，c_1, c_2 は右手系の単位直交系をなすベクトルとして，微分方程式 (15) を

$$t=t_1 \text{ のとき，} \quad A=C, \ e_1=c_1, \ e_2=c_2$$

という初期条件の下で解いて得られる解を

$$A=A(t), \quad e_1=e_1(t), \quad e_2=e_2(t)$$

とすると，これはつねに単位直交系であって，その全体は初期条件のとり方を変えても，位置が変わるだけであって，すべて合同である．こうして得られた平面上の曲線 $\gamma : A=A(t)$ $(t_1 \leqq t \leqq t_2)$ を曲面上の曲線弧 A_1A_2 を平面の上へ展開したものであるという．

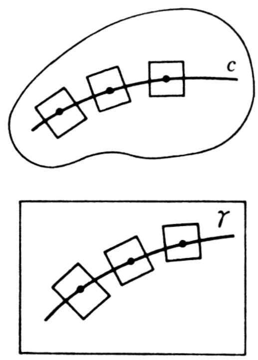


図　4

証明はこの講座の第4章

Q．(11) での e_3 を省いて (15) を作ったあたり，なかなかの着想ですね．ところで，(15) の A, e_1, e_2 は直接には (11) の A, e_1, e_2 ではないのですから，もっと別の記号を使って，

$$dP=\omega_1 f_1+\omega_2 f_2, \quad df_1=\omega_{12}f_2, \quad df_2=-\omega_{12}f_1$$

とでもした方がよいのではありませんか．

A．それは，もっともです．もちろん，その方が概念は明確になるのですが，記号の多くなるのを避ける意味もあったのです．

Q．記号の節約は必ずしも思考の節約にはならないのではないのですか．

A．それはその通りですが，まあ勘弁して下さい．

Q．もう1つ質問があります．展開でできた曲線 γ は，その作り方からみますと曲線 c とそれに沿っての曲面の接平面上のベクトル e_1, e_2 に関係していますが，e_1, e_2 のとり方を変えると，形が変わってくるのでしょうか．

A．それも大切な点です．あとでリーマン空間の展開のところでお話ししますが，手段に使った e_1, e_2 には関係ありません．

上に示した曲面上の曲線 c と平面上への展開としてできる曲線 γ とでは，

（I）　対応する部分の長さは等しい．

（II）　曲面上の測地線 c は，展開すると直線になるものである，

という性質がある．これを証明しよう．まず（I）は次のようにしてわかる．

(11) によると，曲面上の曲線の弧の長さ s の微分 ds については，

$$ds^2=(dA, dA)=\omega_1{}^2+\omega_2{}^2$$

ところが，展開できる曲線 γ についても，(15) で e_1, e_2 が単位直交系となっていることから，全く同じ式が成り立つ．

次に (II) を示そう．(15) の解として得られる線 γ が直線であるというのは，弧の長さ s を媒介変数にとると，

$$A=sC+C_1 \ (C, C_1 \text{ は定ベクトル})，\text{したがって } \frac{d^2A}{ds^2}=0 \qquad (16)$$

ところが，(15) によると，

$$\frac{dA}{ds}=\frac{\omega_1}{ds}e_1+\frac{\omega_2}{ds}e_2$$

$$\frac{d^2A}{ds^2}=\frac{d}{ds}\left(\frac{\omega_1}{ds}\right)e_1+\frac{\omega_1}{ds}\frac{de_1}{ds}+\frac{d}{ds}\left(\frac{\omega_2}{ds}\right)e_2+\frac{\omega_2}{ds}\frac{de_2}{ds}$$

$$=\left(\frac{d}{ds}\left(\frac{\omega_1}{ds}\right)+\frac{\omega_2}{ds}\frac{\omega_{21}}{ds}\right)e_1+\left(\frac{d}{ds}\left(\frac{\omega_2}{ds}\right)+\frac{\omega_1}{ds}\frac{\omega_{12}}{ds}\right)e_2$$

$\omega_{12}=-\omega_{21}$

したがって，(16) は次のようになる．

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\omega_1}{ds}\right)+\frac{\omega_2}{ds}\frac{\omega_{21}}{ds}=0, \qquad \frac{d}{ds}\left(\frac{\omega_2}{ds}\right)+\frac{\omega_1}{ds}\frac{\omega_{12}}{ds}=0$$

前回述べたように，これが測地線の微分方程式であるから (II) が示されたことになる．なお，その証明には，(12) が用いられている．

Q．大分，お話しがわかってきた気がします．こうした準備で，リーマン空間へ入っていこうというのですね．

A．その通りです．その目的のために，これからの話と関連することを繰返して示すと，次のようです．

$$ds^2=\omega_1{}^2+\omega_2{}^2 \qquad (17)$$

$$d\omega_1=-\omega_2\wedge\omega_{12}, \quad d\omega_2=\omega_1\wedge\omega_{12} \qquad (18)$$

$$d\omega_{12}=-K\omega_1\wedge\omega_2 \quad (K \text{ はガウスの曲率}) \qquad (19)$$

展開の式 $dA=\omega_1e_1+\omega_2e_2,\quad de_1=\omega_{12}e_2,\quad de_2=-\omega_{12}e_1$ (20)

Q．(17) がこの場合ですと2次元のリーマン空間を定義する式ですね．

A．その通りです．

3．リーマン空間の動座標系

リーマン空間の基本となる $\sum_{ij} g_{ij}X_iX_j$ は正定符号であるから，これは適当な1次変換

$$Y_i=\sum_j u_{ij}X_j \qquad (i, j=1, 2, \cdots, n)$$

ここで $\det(u_{ij})\neq 0$
たとえば，
$X_1{}^2-X_1X_2+X_2{}^2$
では，$Y_1=X_1-\frac{1}{2}X_2$，
$Y_2=\frac{\sqrt{3}}{2}X_2$ とおくと，
$Y_1{}^2+Y_2{}^2$ となる．

によって，

$$\sum_{ij} g_{ij}X_iX_j=\sum_i Y_i{}^2$$

という形に直せる．そこで，リーマン空間 M の各点での双対接空間の中で，

$$\omega_i=\sum_j u_{ij}dx_j \qquad (i=1, 2, \cdots, n) \qquad (21)$$

で定まる基底をとって考える．リーマン空間の曲線の弧の長さ s の微分 ds は，慣習的には，

$$ds^2=\sum_{ij} g_{ij}dx_idx_j$$

で表わされるわけであるが，上のように ω_i をとると，

$$ds^2=\omega_1^2+\omega_2^2+\cdots+\omega_n^2 \tag{22}$$

となる．そこで，

リーマン空間の曲線 c をユークリッド空間の中へ展開する

ことを，曲面の展開にならって考える．その手懸りとなるのは (17) (18) で，(18) に当る式から ω_{12} に当るものを次のように定める．

まず，(21) で与えられる ω_i に対して，

$$d\omega_i=\sum_j \omega_j\wedge\omega_{ji}, \qquad \omega_{ij}=-\omega_{ji} \tag{23}$$

である ω_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,n)$ が只1組あることが次のようにしてわかる．

$\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ は1次独立であるから，

$$d\omega_i=\sum_{jk}\frac{1}{2}a_{jki}\omega_j\wedge\omega_k \qquad (a_{jki}=-a_{kji}) \tag{24}$$

とおくことができる．a_{ijk} はこれで定まるわかっている関数である．そこで，

$$\omega_{ij}=\sum_k t_{ijk}\omega_k \qquad (t_{ijk}=-t_{jik}) \tag{25}$$

とおいて t_{ijk} を定める．これを (23) に代入すると，(24) も使って，

$$\sum_{jk}\frac{1}{2}a_{jki}\omega_j\wedge\omega_k=\sum_{jk}\omega_j\wedge t_{jik}\omega_k$$

$\omega_j\wedge\omega_k$ の係数をくらべて，　$t_{jik}-t_{kij}=a_{jki}$ (26)

i,j を入れ替えて，　$t_{ijk}-t_{kji}=a_{ikj}$ (27)

(26) で i,k を入れかえて，　$t_{jki}-t_{ikj}=a_{jik}$ (28)

(26)＋(27)＋(28) を作って，

$$-t_{kji}=t_{jki}, \quad t_{jik}+t_{ijk}=0, \quad t_{kij}+t_{ikj}=0$$

であることを使うと，　$2t_{jki}=a_{jki}+a_{ikj}+a_{jik}$ (29)

これによって t_{jki} が定まるので，(25) によって ω_{ij} も定まる．

次に，こうして得られた ω_{ij} を使って展開を次のように定める．

リーマン空間 M の中の曲線　$c: x_i=x_i(t)$ $(t_1\leqq t\leqq t_2,\ i=1,2,\cdots,n)$ に沿っては $\omega_{ij}=a_{ij}(t)dt$ である．これによって，未知関教ベクトル A, e_i についての微分方程式

$$dA=\sum_i \omega_i e_i, \quad de_i=\sum_j \omega_{ij}e_j \qquad (i,j=1,2,\cdots,n) \tag{30}$$

を考え，一定の位置ベクトル C と単位直交系 c_i $(i=1,2,\cdots,n)$ について，

初期条件　$t=t_1$ のとき，$A=C,\ e_i=c_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$

の下で解いて得られる解 $A=A(t), e_i=e_i(t)$ を作ると，前に述べたことと同じようにしてこの解がつねに単位直交系をなしていることがわかる．こうして得られた線 $\gamma: A=A(t)$ がリーマン空間の曲線 c をユークリッド空間へ展開したものである．

Q．この辺は，曲面の展開の場合と全く同じですね．結局，曲面のときは ω_{12} がはじめからあったのに対して，リーマン空間のときは ω_{ij} を (23) からきめたわけですね．ところで，ds^2 を (22) の形に直すときの $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ のとり方はいろいろあるので，ω_{ij} もそれに従ってちがってきます．これが (30) による展開にどのように影響するのでしょうか．

A．それが大切な点で，曲面の展開の場合にも，保留してあったことです．今ここでリーマン空間の場合をお話ししましょう．

(22) の ds^2 が，別の形

$$ds^2=\bar{\omega}_1{}^2+\bar{\omega}_2{}^2+\cdots+\bar{\omega}_n{}^2 \tag{31}$$

で表わされたとすると，$\bar{\omega}_i$ はもともと

$$\bar{\omega}_i=\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\omega_j \qquad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{32}$$

と書けるわけであるが，この場合は，

(p_{ij}) が直交行列

である．そこで，$\bar{\omega}_1, \cdots, \bar{\omega}_n$ に対する ω_{ij} を，

$$d\bar{\omega}_i=\sum_j \bar{\omega}_j\wedge\bar{\omega}_{ji}, \qquad \bar{\omega}_{ij}=-\bar{\omega}_{ji} \tag{33}$$

によってきめるわけであるが，これは ω_i に対する ω_{ij} を使って

$$\bar{\omega}_{ij}=\sum_{kh} p_{ik}p_{jh}\omega_{kh}+\sum_k dp_{ik}p_{jk} \tag{34}$$

と表わされるものであることが，次のように確かめられる．まず (32) (23) から，

$$d\bar{\omega}_i=\sum_j p_{ij}d\omega_j+\sum_j dp_{ij}\wedge\omega_j=\sum_{jk} p_{ij}\omega_k\wedge\omega_{kj}+\sum_j dp_{ij}\wedge\omega_j$$

m が関数，ω が1次微分式のとき，$d(m\omega)=md\omega+dm\wedge\omega$

(p_{ij}) は直交行列だから (32) から，$\omega_i=\sum_j p_{ji}\bar{\omega}_j$. ゆえに，

$$\begin{aligned}d\bar{\omega}_i&=\sum_{jhk} p_{ij}p_{hk}\bar{\omega}_h\wedge\omega_{kj}+\sum_{jh} dp_{ij}\wedge p_{hj}\bar{\omega}_h\\&=\sum_h \bar{\omega}_h\wedge\Big(\sum_{kj} p_{hk}p_{ij}\omega_{kj}-\sum_j dp_{ij}p_{hj}\Big)\end{aligned} \tag{35}$$

ところが，$\sum_j p_{ij}p_{hj}=\delta_{ih}$ だから，その微分をとると，

$$\sum_j dp_{ij}p_{hj}+\sum_j p_{ij}dp_{hj}=0, \quad ゆえに \quad -\sum_j dp_{ij}p_{hj}=\sum_j p_{ij}dp_{hj} \tag{36}$$

となって，(34) によって (35) は

$$d\bar{\omega}_i=\sum_h \bar{\omega}_h\wedge\bar{\omega}_{hi}$$

となる．他方，(34) (36) と $\omega_{kh}=-\omega_{hk}$ によって，

$$\bar{\omega}_{ij}=\sum_{ih} p_{ik}p_{jh}(-\omega_{hk})-\sum_k p_{ik}dp_{jk}=-\bar{\omega}_{ji}$$

これで (33) が確かめられたことになる．

次に (30) の解 A, e_i に対して，

$$\bar{A}=A, \quad \bar{e}_i=\sum_j p_{ij}e_j \qquad (i, j=1, 2, \cdots, n) \tag{37}$$

とおくと，(30) (32) (37) と (p_{ij}) が直交行列であることから，

$$d\bar{A}=dA=\sum_i \omega_ie_i=\sum_i \bar{\omega}_i\bar{e}_i$$

また，(30) (37) によって，

$$d\bar{e}_i=\sum_j p_{ij}de_j+\sum_j dp_{ij}e_j=\sum_{jk} p_{ij}\omega_{jk}e_k+\sum_k dp_{ik}e_k$$

(p_{ij}) が直交行列だから $e_k=\sum_h p_{hk}\bar{e}_h$ となって，(34) により

$$d\bar{e}_i=\sum_{jkh} p_{ij}\omega_{jk}p_{hk}\bar{e}_h+\sum_{kh} dp_{ik}p_{hk}\bar{e}_h=\sum_h \bar{\omega}_{ih}\bar{e}_h$$

したがって，

$$d\bar{A}=\sum_i \bar{\omega}_i\bar{e}_i, \qquad d\bar{e}_i=\sum_j \bar{\omega}_{ij}\bar{e}_j \tag{38}$$

こうして，(30) の解に (37) という変換を施した $\bar{A}, \bar{e}_i$ は，(32) (34) で定ま

る $\bar{\omega}_i, \bar{\omega}_{ij}$ によって (38) の解になっている．したがって，展開という立場からいうと (30) と (38) は本質的に同じものを与えるといってよい．

Q．計算は少しごたごたしていますが，ごく当り前のことをしらべたという感じです．結局 (32) (34) が眼目ですね．

A．その通りです．

こうして，リーマン空間の曲線 c をユークリッド空間へ展開することができるが，そのとき，104ページでも述べたように，

展開によって曲線の長さは変わらない

ことがわかる．また，M の曲線 c をユークリッド空間へ展開したものが直線であるとき，c を M の測地線という．これは，微分方程式

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\omega_i}{ds}\right)+\sum_j \frac{\omega_j}{ds}\frac{\omega_{ji}}{ds}=0 \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

を満たしていることも106ページと同じ計算でわかる．測地線上では十分近い2点を結ぶ曲線の中で弧の長さが極小となるものがもとの測地線の弧であることもわかっている．

また，上で示した M の曲線 c に沿っての展開は，曲線のみならず c 上の各点の接空間をユークリッド空間へ実現しているものとも考えられる．それは，各点での接空間の中での基底で，双対接空間の中の基底 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ に双対的なものを考えて，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ とし，それを展開によってユークリッド空間内にできた $e_1, e_2, \cdots, e_n$ に対応させればよい．こうして，たとえば，曲線 c に沿ってのベクトル場 $v=\sum_i v_iX_i$ の微分は展開によって，

$\omega_i=\sum_j p_{ij}dx_j$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ と $X_i=\sum_j q_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ が双対的 $\rightleftarrows$ $\sum_k p_{ik}q_{jk}=\delta_{ij}$

$$\begin{aligned} dv &= d(\sum_i v_ie_i)=\sum_i dv_ie_i+\sum_i v_ide_i \\ &= \sum_i dv_ie_i+\sum_{ji} v_j\omega_{ji}e_i=\sum_i(dv_i+\sum_j v_j\omega_{ji})e_i \end{aligned}$$

となる．このベクトル場が展開によって平行になってくるための条件は

$$dv_i+\sum_j v_j\omega_{ji}=0$$

となる．

Q．何だかあまりよくわかりませんが．

A．この程度の説明ではそうでしょうね．いずれまたゆっくりお話しします．ここでは，あと，曲率のことだけお話ししておきます．

(p_{ij}) が直交行列であることから (34) によって，

$$\sum_j \bar{\omega}_{ij}p_{jl}=\sum_k p_{ik}\omega_{kl}+dp_{il} \tag{39}$$

両辺を外微分して，

$$\sum_j d\bar{\omega}_{ij}p_{jl}-\sum_j \bar{\omega}_{ij}\wedge dp_{jl}=\sum_k p_{ik}d\omega_{kl}+\sum_k dp_{ik}\wedge\omega_{kl}$$

一般に ω が1次微分式，m が関数のとき，$d(\omega m)=d\omega m-\omega\wedge dm$

この式へ (39) から得られる

$$dp_{jl}=\sum_h \bar{\omega}_{jh}p_{hl}-\sum_h p_{jh}\omega_{hl}, \qquad dp_{ik}=\sum_h \bar{\omega}_{ih}p_{hk}-\sum_h p_{ih}\omega_{hk}$$

を代入して整理すると，

$$\sum_j(d\bar{\omega}_{ij}-\sum_k \bar{\omega}_{ik}\wedge\bar{\omega}_{kj})p_{jl}=\sum_k p_{ik}(d\omega_{kl}-\sum_h \omega_{kh}\wedge\omega_{hl})$$

そこで，

$$\bar{\Omega}_{ij}=d\bar{\omega}_{ij}-\sum_l \bar{\omega}_{il}\wedge\bar{\omega}_{lj},\qquad \Omega_{ij}=d\omega_{ij}-\sum_l \omega_{il}\wedge\omega_{lj} \tag{40}$$

とおくと,

$$\sum_j \bar{\Omega}_{ij}p_{jl}=\sum_k p_{ik}\Omega_{kl}$$

(p_{ij}) が直交行列であることから,

$$\bar{\Omega}_{ij}=\sum_{kl} p_{ik}p_{jl}\Omega_{kl} \tag{41}$$

この (Ω_{ij}), $(\bar{\Omega}_{ij})$ をそれぞれ基底 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ および $\bar{\omega}_1, \cdots, \bar{\omega}_n$ に対する曲率テンソルの微分形式という. (41) からわかるように,

$\Omega_{ij}=0\ \ (i, j=1, 2, \cdots, n)$　と　$\bar{\Omega}_{ij}=0\ \ (i, j=1, 2, \cdots, n)$ とは同等

である. ユークリッド空間では $ds^2=dx_1{}^2+\cdots+dx_n{}^2$ だから, $\omega_i=dx_i\ (i=1, 2, \cdots, n)$ とおくと (24) によって $a_{ijk}=0$. したがって (29) によって $t_{ijk}=0$ となって $\omega_{ij}=0$. これから $\Omega_{ij}=0$. これがもっとちがった (22) に適する $\omega_1, \cdots, \omega_n$ から出発しても変わらないわけである.

Q. この曲率テンソル形式が3次元の曲面の曲率と関係があるのですか.

A. その通りです. 上のことを2次元で考えるとよくわかります.

(40) に当るのが
$\Omega_{12}=d\omega_{12}=-K\omega_1\wedge\omega_2$

練　習　問　題

1. ユークリッド空間で球面座標 r, θ, φ を使うと,

$$ds^2=dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\varphi^2$$

となっている. $\omega_1=dr$, $\omega_2=rd\theta$, $\omega_3=r\sin\theta d\varphi$ とおいて $\omega_{ij}\ (i, j=1, 2, 3)$ を求め, 曲率テンソルの微分形式が0となることを確かめよ.

2. $n+1$ 次元のユークリッド空間の超曲面を103ページ例2で示したようにしてリーマン空間と考えるとき, $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ を適当にとると曲率テンソルの微分形式は,

$$\Omega_{ij}=-k_ik_j\omega_i\wedge\omega_j \qquad (i, j=1, 2, \cdots, n)$$

となることを示せ. 特に球面 $X_1{}^2+X_2{}^2+\cdots+X_{n+1}{}^2=a^2$ ではどうなるか.

答とヒント.

1. $\omega_{ii}=0$, $\omega_{12}=-\omega_{21}=d\theta$, $\omega_{23}=-\omega_{32}=\cos\theta\, d\varphi$, $\omega_{31}=-\omega_{13}=-\sin\theta\, d\varphi$ となって, $\Omega_{12}=d\omega_{12}-\omega_{13}\wedge\omega_{32}=0$ 等.

2. 前章の3次元ユークリッド空間内の曲面の場合にならって計算すればよい. 超曲面上の各点 A での接平面上に単位直交系 $e_1, \cdots, e_n$ をとり, その法線単位ベクトルを e_{n+1} とし, $i, j=1, 2, \cdots, n$ として,

$$dA=\sum_i \omega_ie_i,\quad de_i=\sum_j \omega_{ij}e_j+\omega_{in+1}e_{n+1},\quad \omega_{n+1}=0$$

構造方程式から　$d\omega_i=\sum_j \omega_j\wedge\omega_{ji}$,　$0=d\omega_{n+1}=\sum_j \omega_j\wedge\omega_{jn+1}$

$$\Omega_{ij}=d\omega_{ij}-\sum_k \omega_{ik}\wedge\omega_{kj}=\omega_{in+1}\wedge\omega_{n+1j}=-\omega_{in+1}\wedge\omega_{jn+1}$$

したがって, $\omega_{jn+1}=\sum_i c_{ji}\omega_i\ (c_{ij}=c_{ji})$ となるが, $\omega_1, \cdots, \omega_n$ に適当な直交変換を施こすと, $c_{ii}=k_i$, $c_{ij}=0\ (i\neq j)$ となる. 与えられた球面では, $k_i=\dfrac{1}{a}$.

第10章 変分問題

関数の極大極小よりもう少し進んだ極大極小の問題に変分問題というのがあって，これも各方面に応用が広い．その組織的研究はオイラーに始まり，ヤコービ，ワイエルシュトラスに至って一応の理論が完成した．これがいわゆる古典変分学である．これをハミルトンが幾何光学，解析力学に用いた波動の考えに根ざす方法で研究したのはカラテオドリである．彼はこれまでここで述べてきたような微分形式の理論を活用していないが，その利用によって彼の理論は一層明快になる．ここでは，古くからの扱いと，この微分形式による扱いとを比較して概説することにしよう．


オイラー
L. Euler 1707-1783


ヤコービ
Jacobi 1804-1851


ワイエルシュトラス
K. Weierstrass
1815-1897

ハミルトン
W. R. Hamilton
1805-1865

カラテオドリ
C. Caratheodory
1873-1950

1. 変分問題

重力が鉛直下方に働いている場で，1点 O から他の1点 A まで滑らかな軌道を作って，質点を初速0で O から放つとき，A へ至るまでの時間を最も短くするのには，どんな軌道を作ればよいであろうか．この場合，O を原点，水平方向に x 軸，鉛直下方に y 軸をとり，A の座標を (a,b) とする．また，質点の質量を1，質点の軌道の上での位置が (x,y) のときの速さを v とすると，

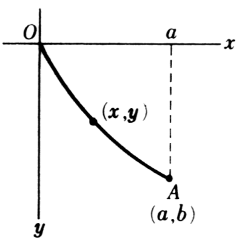


図 1

運動のエネルギーは $\frac{1}{2}v^2$,

位置のエネルギーは $-gy$

で，$\frac{1}{2}v^2-gy$ は一定である．点 O では $v=0$, $y=0$ だから，結局

$$\frac{1}{2}v^2-gy=0 \qquad したがって, \qquad v=\sqrt{2gy}$$

いま，軌道の上で O から点 (x,y) までの弧の長さを s, O から A へいたるに要する時間を T とすると，$y=y(x)$ と考えて，

$$T=\int dt=\int\frac{ds}{v}=\int_0^a\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx \qquad (1)$$

結局，$y(0)=0, y(a)=b$ となる $y=y(x)$ の中で，この積分の値が最小となるものを求めればよいことになる．

Q．つまり，関数の値の極大極小とちがって，積分 T の値を最小にする関数を求めることですね．この話は，前にどこかで聞いたことがあります．求める線が直線でなくてサイクロイドだということで，ちょっと意外に思ったことがあります．いまから，その証明を教えて頂けるのですか．

A．いや，ここでは話のいとぐちで，証明はこの回の終りになります．

このことをもっと一般に扱うと，次のようになる．

まず，関数 $L(x,y,p)$ と2点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ が与えられていて，これを結ぶ曲線 $y=y(x)$ の全体を考える．だから，

$$y_1=y(x_1),\quad y_2=y(x_2)$$

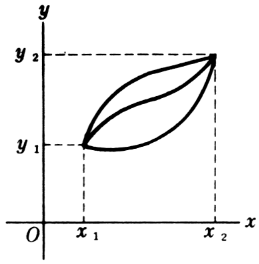


図 2

この中で，

$$J[y]=\int_{x_1}^{x_2}L(x,y,y')dx \tag{2}$$

関数については，すべて C^2 級としておく．

の値を極大または極小にするものを求めよう．

いま，このような $y=y(x)$ があったとし，ε は定数，$\varphi=\varphi(x)$ については，

$$\varphi(x_1)=0,\quad \varphi(x_2)=0 \tag{3}$$

として $y+\varepsilon\varphi$ を考えると，

$$J[y+\varepsilon\varphi]=\int_{x_1}^{x_2}L(x,\ y+\varepsilon\varphi,\ y'+\varepsilon\varphi')dx$$

右辺の被積分関数を ε についてテーラー展開すると，

$$J[y+\varepsilon\varphi]=J[y]+\int_{x_1}^{x_2}(L_y(x,y,y')\varepsilon\varphi+L_{y'}(x,y,y')\varepsilon\varphi')dx+O(\varepsilon^2)$$

$L_{y'}$ は $L(x,y,p)$ を p で偏微分して $p=y'$ とおいたものである．

ここで，(3) によって，

$$\int_{x_1}^{x_2}L_{y'}\varphi'dx=[L_{y'}\varphi]_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\varphi\frac{d}{dx}L_{y'}dx=-\int_{x_1}^{x_2}\varphi\frac{d}{dx}L_{y'}dx$$

となって，

$$J[y+\varepsilon\varphi]-J[y]=\varepsilon\int_{x_1}^{x_2}\left(L_y-\frac{d}{dx}L_{y'}\right)\varphi dx+O(\varepsilon^2)$$

ε が十分0に近いときは，この値は一定の符号でなければならないから，

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(L_y-\frac{d}{dx}L_{y'}\right)\varphi dx=0 \tag{4}$$

ここで，$\varphi=\varphi(x)$ は $\varphi(x_1)=0,\varphi(x_2)=0$ という以外は任意だから，

$$L_y-\frac{d}{dx}L_{y'}=0 \tag{5}$$

これは $J[y]$ を極大または極小にする $y=y(x)$ の満たす式で，y について一般には2階の微分方程式である．これを変分法におけるオイラーの微分方程式といい，その解を極値関数，グラフを考えると極値曲線という．

極値関数，極値曲線 extremal

Q．(4) から (5) へ移るところが，少し飛躍しているようですが．

A．そうです．ここで次のことを使っています．

$f(x)$ は $[a,b]$ で定義された連続関数，$\varphi(x)$ は $\varphi(a)=0,\varphi(b)=0$ という条件をみたす任意の連続関数のとき，

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=0 \quad ならば，\quad f(x)=0$$

証明は，次のようです．$f(x_1)\neq 0$ とすれば $f(x)$ は x_1 の近傍 $[x_1-c,\ x_1+c]$ で一定符号となるように c がとれる．そこで，

$[a,x_1-c]$，$[x_1+c,b]$　では　$\varphi(x)=0$

$(x_1-c,\ x_1+c)$　では　$\varphi(x)$ は $f(x_1)$ と同符号

となる $\varphi=\varphi(x)$ をとると，$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx>0$ となって矛盾を生ずる．

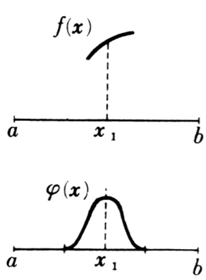


図 3

たとえば，$\alpha=x_1-c$，$\beta=x_1+c$ とおいて，$\varphi(x)$ は，$\alpha\leqq x\leqq\beta$ で $\pm(x-\alpha)^k(x-\beta)^k$ 他の区間では0とすると $\varphi(x)$ は C^{k-1} 級

Q．(5) は求める解の必要条件にすぎませんね．

A．そうです．このあと，極大極小の判定が要るのですが，それがなかなかのことで，これをあとからお話しします．昔からの方法のことはこの辺でやめて，微分形式を使うやり方へ移ります．ここでは2次元の場合を扱いますが n 次元でも同じです．そして，これまで座標を (x,y) で表わしていたのを，x_1, x_2 とします．

2. 変分問題の微分形式

ここで扱うのは，2次元の空間（局所多様体）M で，その点 x の座標を x_1, x_2 で表わす．また，M の各点 x での接空間を考え，その上のベクトル y の自然基底 $\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}$ についての成分を y_1, y_2 とする．そして，x, y の関数で次の性質をもつ $F(x,y)=F(x_1,x_2,y_1,y_2)$ を考える．

（Ⅰ） $F(x,y)$ は C^∞ 級で，$y=(y_1,y_2)$ について正1次同次関数である．

つまり，$k>0$ のとき，　$F(x,ky)=kF(x,y)$

（Ⅱ） $F_{ij}=\dfrac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_j}$ とおくとき，行列 $\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{12} & F_{22} \end{pmatrix}$ の階数は1．

あとからは，（Ⅱ）をもっと進めて，

（Ⅱ′） $\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{12} & F_{22} \end{pmatrix}$ は準正定符号，準負定符号

に分けて考える．

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ の階数が1というのはこの行列の行列式が0で，a_{11}, a_{12}, a_{22} の少なくとも1つが0でないことである．準正定符号とは，$a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2 \geqq 0$ のことである．

（Ⅰ），（Ⅱ）を満たす $F=F(x,y)$ が M の上で考えられているとき，M の曲線

$$x=x(t) \qquad (t_1 \leqq t \leqq t_2) \tag{6}$$

に沿っては，その長さを，

$$s=\int_{t_1}^{t_2} F\left(x_1, x_2, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}\right)dt \tag{7}$$

によって与えることができる．それは，(6) で与えられる曲線で，u の増加関数 $t=t(u)$ を使って媒介変数 t を u に変えるとき，

$$\int_{u_1}^{u_2} F\left(x_1, x_2, \frac{dx_1}{du}, \frac{dx_2}{du}\right)du=\int_{u_1}^{u_2} F\left(x_1, x_2, \frac{dx_1}{dt}\frac{dt}{du}, \frac{dx_2}{dt}\frac{dt}{du}\right)du$$

は（Ⅰ）によって (7) に等しくなるからである．

Q．この変換で，$t=t(u)$ が増加関数ですから (6) は向きを考えた曲線ですね．それからいろいろ質問があります．（Ⅱ）や（Ⅱ′）は，座標 x_1, x_2 について言っているのですが，ちがった座標系でいっても同じことに帰着するのですね．

A．そうです．$x_i=x_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ $(i=1,2)$ という座標変換によると，

$p_{ij}=\dfrac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j}$ $(i,j=1,2)$ というようにおくとき，

$$\frac{\partial}{\partial x_1}=p_{11}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_1}+p_{21}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_2}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2}=p_{12}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_1}+p_{22}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_2} \tag{8}$$

また，このとき，接空間内のベクトル y の座標系 (x_1, x_2) で考えた成分 (y_1, y_2) と $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ で考えた成分 $(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$ の間には，

(y_1, y_2) は反変ベクトル

$$\bar{y}_1=p_{11}y_1+p_{12}y_2, \qquad \bar{y}_2=p_{21}y_1+p_{22}y_2$$

という関係が成り立ちます．

Q．もう一つ質問があります．前のお話の $J[y]$ と (7) とは，どんな関係があるのでしょうか．

A．(2) は (7) で $x=x_1,\ y=x_2,\ y'=\dfrac{dx_2}{dt}\Big/\dfrac{dx_1}{dt}$ とおいたものです．この形ですと x_1, x_2 が対等に扱えて，あとからの展開に便利なのです．

次に，

$$p_1=\frac{\partial F}{\partial y_1},\qquad p_2=\frac{\partial F}{\partial y_2}\tag{9}$$

(p_1, p_2) は共変ベクトル

とおくと，p_1, p_2 は y_1, y_2 の関数として独立でなく，関数関係がある．これを，

$$H(x_1, x_2, p_1, p_2)=0\tag{10}$$

で表わす．これは，F が y_1, y_2 について 1 次同次であることによるわけで，このときは，

$$\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial p_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial p_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial p_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial p_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}=0$$

となっているのである．とくに

$$(F_{11}, F_{12})\neq(0, 0)$$

のときは，(10) を

$$p_2=-h(x_1, x_2, p_1)\tag{11}$$

の形に表わすことができる．それは，たとえば $F_{12}\neq 0$ のときは (9) のはじめの式から y_2 を x_1, x_2, y_1, p で表わし，これを (9) のあとの式へ代入すればよい．

このとき，(II)によって y_1 は消える．

p_1, p_2 の関係を一般の形 (10) に表わすときは，次のことを仮定しておく．

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p_1},\ \frac{\partial H}{\partial p_2}\right)\neq(0, 0)$$

そこで，$y\neq 0$ の場合について (9) によって，

$$(x, y)=(x_1, x_2, y_1, y_2)\ \longrightarrow\ (x, p)=(x_1, x_2, p_1, p_2)\tag{12}$$

という写像を考える．このとき，(x, y) の集合は 4 次元であるが，(x, p) の集合は (10), (11) の示すように 3 次元である．この場合，

$$\omega=p_1dx_1+p_2dx_2\tag{13}$$

とおくと，もとの空間 M の曲線 $c: x=x(t)$ $(t_1\leqq t\leqq t_2)$ に沿って，

$$y=\dot{x}=\frac{dx}{dt},\quad つまり\quad y_1=\dot{x}_1=\frac{dx_1}{dt},\quad y_2=\dot{x}_2=\frac{dx_2}{dt}$$

以下，t で微分することを・で表わす．

とし，(9) によって対応する $p=(p_1, p_2)$ を考えると，ここへできる線 $x=x(t)$, $p=p(t)$ に沿っては，(9) (I) によって，

$$\begin{aligned}\int\omega&=\int_{t_1}^{t_2}(p_1\dot{x}_1+p_2\dot{x}_2)dt=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y_1}(x, \dot{x})\dot{x}_1+\frac{\partial F}{\partial y_2}(x, \dot{x})\dot{x}_2\right)dt\\&=\int_{t_1}^{t_2}F(x, \dot{x})dt=\text{曲線 } c \text{ の長さ}\end{aligned}$$

となる．今後は，(x, p) のつくる空間 (10) における (13) を中心にして，研究を進めていく．

Q．大分お話が進みましたから，この辺でゆっくりさせて下さい．まず (9) を考えるところは，解析力学のはじめに学んだことに似ていますね．そこで

は，(x, p) の作る空間を相空間といったように覚えています．あれと関係があるのですか．

相空間 phase space

A．少しようすはちがいますが，関係はあります．このことは次回に詳しく述べることにして，ここでは数学の立場だけで考えましょう．まず (x, y) は点 x とその点での接空間内のベクトル(反変ベクトル)を併せて考えたものですが，その全体は M の接バンドルと呼ばれています．次に (9) の p_1, p_2 は M の座標変換 $x_i = x_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ $(i=1,2)$ によると，(8) によって，

$$p_1 = \frac{\partial F}{\partial y_1} = \frac{\partial \bar{y}_1}{\partial y_1}\frac{\partial F}{\partial \bar{y}_1} + \frac{\partial \bar{y}_2}{\partial y_1}\frac{\partial F}{\partial \bar{y}_2} = p_{11}\bar{p}_1 + p_{21}\bar{p}_2$$

p_2 についても同じように考えて，結局

$$p_1 = p_{11}\bar{p}_1 + p_{21}\bar{p}_2, \qquad p_2 = p_{12}\bar{p}_1 + p_{22}\bar{p}_2$$

これは，(9) で定まる (p_1, p_2) が共変ベクトルの成分になっていることを示しています．

Q．接空間のベクトルが反変ベクトルで，双対接空間のベクトルが共変ベクトルですから，(x, p) は各点 x とその双対接空間の中のベクトル p を併せて考えたものということになりますね．

A．そうです．(9) で定まる p は特殊な共変ベクトルですが，点 x と一般の共変ベクトル p とを併せて考えた (x, p) の全体は M の双対接バンドルといわれるものです．(12)は，

$$\{(x, y) \mid y \neq 0\} \longrightarrow \{(x, p)\}$$

で，その像 (x, p) の全体が (10) というわけです．

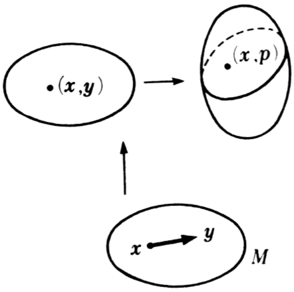


図 4

Q．その逆変換は考えられないわけですね．それにしても，かなり大掛りではありませんか．

A．それはそうですが，やはり古典的な変分問題でも，現代的な立場から基本を明確にしようとすればこういうことになります．しかし，以下のお話しでは，あまりこだわらないで計算を追って頂けばよいでしょう．

3. 極値曲線と e 曲線

(9) で定まる (x, p) のつくる曲面 (10) をここでは H 曲面と呼ぶことにする．その上で，(13) で定まる 1 次微分形式 ω を考え，その外微分をとる．このとき $\dfrac{\partial H}{\partial p_2} \neq 0$ とすると，(10) は (11) の形と考えられるから，

$$\begin{aligned} d\omega &= dp_1 \wedge dx_1 + dp_2 \wedge dx_2 = dp_1 \wedge dx_1 - dh \wedge dx_2 \\ &= dp_1 \wedge dx_1 - \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial h}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial h}{\partial p_1}dp_1\right) \wedge dx_2 \\ &= \left(dp_1 + \frac{\partial h}{\partial x_1}dx_2\right) \wedge \left(dx_1 - \frac{\partial h}{\partial p_1}dx_2\right) \end{aligned}$$

そこで，
$$\theta = dx_1 - \frac{\partial h}{\partial p_1}dx_2, \qquad \rho = dp_1 + \frac{\partial h}{\partial x_1}dx_2 \tag{14}$$

とおくと，
$$d\omega = \rho \wedge \theta \tag{15}$$

となる．ここで，次のことがいえる．

M の曲線 $c: x=x(t)$ $(t_1 \leqq t \leqq t_2)$ に沿って $y=\dot{x}(t)$ を考え，写像 (12) によって $(x, \dot{x})$ を H 曲面上の曲線 $x=x(t)$, $p=p(t)$ へ移すことを考える．この場合，

$$\theta=0, \qquad \rho=0 \tag{16}$$

をみたすものを e 曲線と呼ぶことにする．そうすると，c の両端 $a=x(t_1)$, $b=x(t_2)$ に対して，(x, p) のつくる空間（双対接バンドル）における曲線の集まり $x=x(t, \varepsilon)$, $p=p(t, \varepsilon)$ で，

$$x(t_1, \varepsilon)=a, \quad x(t_2, \varepsilon)=b \tag{17}$$

をみたすものを考え，$\varepsilon=0$ の場合が e 曲線であるとしておくと，$t_1 \leqq t \leqq t_2$ での積分について，

$$\left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\int \omega\right]_{\varepsilon=0}=0 \tag{18}$$

となっている．

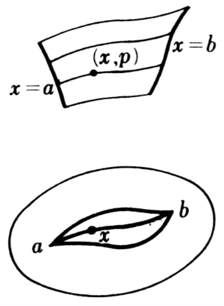


図 5

証明．$T=\dfrac{\partial}{\partial t}$, $E=\dfrac{\partial}{\partial \varepsilon}$ とおくと，

$$d\omega(T, E)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\omega(E)-\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\omega(T)\right)$$

$$(\rho\wedge\theta)(T, E)=\frac{1}{2}(\rho(T)\theta(E)-\rho(E)\theta(T))$$

(15) によるとこれが等しいのだから，

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\omega(T)=\frac{\partial}{\partial t}\omega(E)+\theta(T)\rho(E)-\theta(E)\rho(T)$$

また，e 曲線に沿っては (16) が成り立つわけだから，

$$\varepsilon=0 \text{ のとき} \qquad \theta(T)=0, \quad \rho(T)=0 \tag{19}$$

そこで，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\int \omega &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\int_{t_1}^{t_2}\omega(T)\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\omega(T)\,dt \\ &=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial}{\partial t}\omega(E)\,dt+\int_{t_1}^{t_2}(\theta(T)\rho(E)-\theta(E)\rho(T))\,dt\end{aligned} \tag{20}$$

(17) によると，

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial}{\partial t}\omega(E)\,dt=[\omega(E)]_{t_1}^{t_2}=\left[p_1\frac{\partial x_1}{\partial \varepsilon}+p_2\frac{\partial x_2}{\partial \varepsilon}\right]_{t_1}^{t_2}=0$$

これと (19) から (20) によって，(18) が証明できたことになる．（証明終）

ここで，e 曲線をきめる微分方程式 (16) を H で表わしてみよう．

まず，(11) を (10) に代入すると成り立っているのだから，$H(x_1, x_2, p_1, -h)=0$ これを x_1, p_1 でそれぞれ偏微分して，

$$\frac{\partial H}{\partial x_1}-\frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial h}{\partial x_1}=0, \qquad \frac{\partial H}{\partial p_1}-\frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial h}{\partial p_1}=0$$

また，全微分をとって，

$$\frac{\partial H}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial H}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial H}{\partial p_1}dp_1+\frac{\partial H}{\partial p_2}dp_2=0$$

これらの式と (14) によって (16) は次のように書き直せる．

$$\frac{dx_1}{\dfrac{\partial H}{\partial p_1}}=\frac{dx_2}{\dfrac{\partial H}{\partial p_2}}=\frac{dp_1}{-\dfrac{\partial H}{\partial x_1}}=\frac{dp_2}{-\dfrac{\partial H}{\partial x_2}} \tag{21}$$

これはまた，変数 t を適当にとって，

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i}\qquad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i}\qquad (i=1,2) \tag{22}$$

と表わすこともできる．

一般の変数でいえば，

$$\frac{dx_i}{dt}=\lambda\frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\frac{dp_i}{dt}=-\lambda\frac{\partial H}{\partial x_i}$$

さらに，M 上の任意の曲線 $x=x(t)$ に沿って $(x,\dot{x})$ を考え，これを (x,p) の空間へ移してできる線 $x=x(t)$，$p=p(t)$ については，

$$\theta=dx_1-\frac{\partial h}{\partial p_2}dx_2=\left(\frac{\partial H}{\partial p_2}\right)^{-1}\left(\frac{\partial H}{\partial p_2}dx_1-\frac{\partial H}{\partial p_1}dx_2\right)=0 \tag{23}$$

となることが次のように示される．

$p_i=\dfrac{\partial F}{\partial y_i}$ $(i=1,2)$ を (10) に代入すれば成り立っている．ここで独立変数を y_1, y_2 とみて偏微分すると，(9) によって，

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial H}{\partial p_i}F_{ij}=0\qquad (j=1,2)$$

また，F が y_1, y_2 について 1 次同次だから，

$$\sum_{i=1}^{2}y_iF_{ij}=0\qquad (j=1,2)$$

(II) によって，

$$y_i=\lambda\frac{\partial H}{\partial p_i}\qquad (i=1,2)$$

そこで，y_i を曲線 $x=x(t)$ に沿っての $\dot{x}_i$ にとると，$\dfrac{dx_i}{dt}=\lambda\dfrac{\partial H}{\partial p_i}$
したがって，(23) が成り立つ．こうして，M の曲線は (x,p) のつくる空間の $\theta=0$ をみたす曲線へ引上げることができる．このことと (18) とから次のことがいえる．

> M の曲線 $x=x(t)$ を，これまでの方法で M の双対接バンドルへ引上げてできる曲線の中で，e 曲線は M の極値曲線を引上げたものである．

Q．(22) は力学で見かける式と同じ形ですが，本質的にはオイラーの方程式 (5) と同じなのですね．

A．その通りです．

Q．それにしては，このやり方は，手が込んでいるように思うのですが．

A．そうですね．もとの空間 M でなくその上の接バンドル，さらに双対接バンドルへと移るわけですからね．

Q．このやり方の利点はどこにあるのですか．

A．オイラーの微分方程式は 2 階ですが，(x,y) や (x,p) で考えると 1 階です．そして，(22) の形が，さらに研究していくときにいろいろなことを明快にしてくれるのです．ことに解析力学ではそうです．これは次回に述べます．もっとも，ここでは 2 次元で扱いましたが，3 次元以上でも全く同じです．

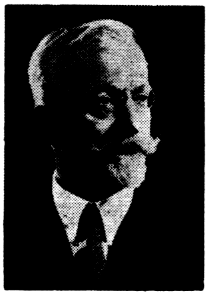
Q．このやり方は，波動と結びついているということでしたが．

A．そうです．オイラーの方程式や $x,\dot{x}$ で考えるときは，曲線やその接線が基本となっているのですが，(x,p) では曲線とその上の各点での曲線に交わる平面を考えていることに当るのです．昔から，幾何光学で光を粒子の動きと考えるフェルマーの立場と，波動と考えるホイヘンスの立場とがありましたが，それが力学ではラグランジュの方法，ハミルトンの方法に尾をひいていて，量子力学へも及んでいるのだと思います．変分学でも，これと同じよう

な流れがあって，これがオイラーの方法と，ハミルトン・カラテオドリの方法に対応していると思います．つまり，

光　　学	力　　学	変　分　学
フェルマー，ニュートン	ラグランジュ	オイラー，ワイエルシュトラス
ホイヘンス，ハミルトン	ハミルトン，ポアンカレ，カルタン	カラテオドリ

ここでは，ハミルトン・カラテオドリの方法を，エリー・カルタンの微分形式を使って考えているのです．


エリー・カルタン
E. Cartan 1869-1951

Q．大分大掛りのことですね．

A．それ程でもありません．考え方がそうなっているというのですから．この辺で実例をやっておきます．

例． $F=f(x_1, x_2)(y_1^2+y_2^2)^{\frac{1}{2}}$

このときは，　$p_i=\dfrac{\partial F}{\partial y_i}=f(x_1, x_2)y_i(y_1^2+y_2^2)^{-\frac{1}{2}}$　　$(i=1, 2)$

y_1, y_2 を消去すると，　$p_1^2+p_2^2-\varphi=0$，ここで $\varphi=f(x_1, x_2)^2$

そこで，　$H=\dfrac{1}{2}(p_1^2+p_2^2-\varphi)$

とおくと，(22) は，

$$\frac{dx_1}{dt}=p_1, \quad \frac{dx_2}{dt}=p_2, \quad \frac{dp_1}{dt}=\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \quad \frac{dp_2}{dt}=\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}$$

とくに，$f(x_1, x_2)$ が x_1 をふくまないときは，φ も同様で，

$$\frac{dp_1}{dt}=0, \qquad \frac{dp_2}{dt}=\frac{1}{2}\varphi'(x_2)$$

$p_1=c$（定数）となり，　$\dfrac{dx_1}{dt}=c, \quad x_1=ct+c_1$　　(24)

x_2 については，　$\dfrac{d^2x_2}{dt^2}=\dfrac{1}{2}\varphi'(x_2)$

両辺に $2\dfrac{dx_2}{dt}$ を掛けて積分して，　$\left(\dfrac{dx_2}{dt}\right)^2=\varphi(x_2)+c_2$

したがって，$p_2^2=\varphi(x_2)+c_2$，ところが $p_1^2+p_2^2-\varphi=0$ だから，

$$c^2+c_2=0 \qquad したがって， \quad c_2=-c^2$$

とくに，最初の問題 (1) では $f(x_2)=x_2^{-\frac{1}{2}}$ と考えてよいから，$\varphi=x_2^{-1}$ となり，

$$\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2=x_2^{-1}-c^2, \quad ゆえに \quad \pm t=\int\left(\frac{1}{x_2}-c^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx_2$$

(1) は，
$T=\dfrac{\sqrt{\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2}}{\sqrt{2gx_2}}dt$

そこで，$x_2=\dfrac{1}{c^2}\sin^2\dfrac{\theta}{2}$ とおくと，

$$\pm t=\int\frac{1}{c^3}\sin^2\frac{\theta}{2}d\theta=\frac{1}{2c^3}(\theta-\sin\theta)+c_3$$

(24) によって，

$$x_1=\pm\frac{1}{2c^2}(\theta-\sin\theta)+b, \qquad x_2=\frac{1}{2c^2}(1-\cos\theta) \qquad (25)$$

これはサイクロイドである．

Q．なるほどサイクロイドが出てきましたね．そこで，このとき実際に極大や極小になるのですか．

A．それをお話しなければ締め括りがつきませんね．

4．極大極小の判定

これまでに求めた極値曲線が，実際に基本となる積分について極大極小を与えるかどうかという判定をする基本的な定理を述べておこう．

定理　変分問題　$s=\int F(x,\dot{x})dt$　(26)

の極値曲線で，点 $a=(a_1,a_2)$ を一端にもつものの全体が，点 $x=(x_1,x_2)$ のつくる空間のある単一連結な領域 D を1重に被っているとする．D の中で1つの点を $b=(b_1,b_2)$ とすると，a から b へいたる極値曲線は，

$\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{12} & F_{22} \end{pmatrix}$ が準正定符号ならば極小，準負定符号ならば極大を与える．

D を極値曲線の場という．

証明．D 内の極値曲線 $x=x(t)$ について $(x,\dot{x})$ を考え，これを H 曲面へ移したものを (x,p) とする．ここで，媒介変数 t のとり方を考えに入れると，

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt}=\lambda z(x)$$

と考えられるが，

$$p_i=\frac{\partial F}{\partial y_i}$$

は y_1,y_2 について0次同次であったから $p_i(x,\lambda z)=p_i(x,z)$ となって x だけの関数と考えられる．

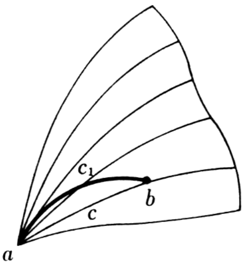


図 6

そして，$\omega=p_1dx_1+p_2dx_2$ については，(14) (16) によって，

$$d\omega=\rho\wedge\theta=0$$

となることが，次のようにして確かめられる．

a を一端とする極値曲線の場が $x=x(t,\varepsilon)$ で与えられていて，これから定まる $p=p(t,\varepsilon)$ を考えると，

$$\theta\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)=0,\qquad \rho\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)=0$$

だから，

$$d\omega\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\right)=(\rho\wedge\theta)\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\right):$$

$$=\frac{1}{2}\left(\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\theta\left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\right)-\rho\left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\right)\theta\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)=0$$

そこで，2点 a,b を結ぶ極値曲線を c，また a,b を結ぶ他の曲線を c_1 とし，c,c_1 の囲む部分は単一連結な領域 $\varDelta$ であるとすると，ガウス・グリーンの公式を $\omega=p_1dx_1+p_2dx_2$ に適用することによって，

ガウス・グリーンの定理
$\int_D d\omega=\int_c \omega$
（c は D の境界）

$$\int_{c_1}\sum_{i=1}^{2}p_i(x,z(x))dx_i-\int_c\sum_{i=1}^{2}p_i(x,\dot{x})dx_i=\int_\varDelta d\omega=0 \tag{27}$$

そこで，

$$s_1=\int_{c_1}\omega=\int_{c_1}\sum_i p_i(x,\dot{x})dx_i,\qquad s=\int_c\omega=\int\sum_i p_i(x,\dot{x})dx_i$$

とおくと，これらはそれぞれ曲線 c_1,c に沿っての積分 (26) の値である．ところが (27) によると，

$$s=\int_{c_1}\sum_i p_i(x,z)dx_i \tag{28}$$

したがって，

$$s_1 - s = \int_{c_1} \sum_i \left(p_i(x, \dot{x}) - p_i(x, z) \right) \dot{x}_i dt \tag{29}$$

そして，

$$\begin{aligned}
\sum_i \left(p_i(x, \dot{x}) - p_i(x, z) \right) \dot{x}_i &= \sum_i \frac{\partial F}{\partial y_i}(x, \dot{x}) \dot{x}_i - \sum_i \frac{\partial F}{\partial y_i}(x, z) \dot{x}_i \\
&= F(x, \dot{x}) - F(x, z) - \sum_i \frac{\partial F}{\partial y_i}(x, z)(\dot{x}_i - z_i) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_j}(x, \eta)(\dot{x}_i - z_i)(\dot{x}_j - z_j) \qquad (30) \\
&\qquad (\eta = k\dot{x} + (1-k)z, \quad 0 < k < 1)
\end{aligned}$$

$F(x, y)$ は y について1次同次関数だから $\sum_i \frac{\partial F}{\partial y_i} y_i = F$

したがって (F_{ij}) が準正定符号ならば (29) (30) によって $s_1 \geqq s$，準負定符号ならば $s_1 \leqq s$

例． 117ページの例でいえば，$F = f(x_1, x_2)(y_1^2 + y_2^2)^{\frac{1}{2}}$ だから，

$$F_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} = f y_2^2 (y_1^2 + y_2^2)^{-\frac{3}{2}}, \qquad F_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial y_2^2} = f y_1^2 (y_1^2 + y_2^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$F_{12} = \frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_2} = -f y_1 y_2 (y_1^2 + y_2^2)^{-\frac{3}{2}}$$

したがって $f = f(x_1, x_2) > 0$ ならば (F_{ij}) は準正定符号で，極値曲線は極小を与え，$f < 0$ ならば極大を与える．

とくに，$f = x_2^{-\frac{1}{2}}$ のとき，$a = (0, 0)$ とすると，(25) から極値曲線は

$$x_1 = a(\theta - \sin\theta)$$
$$x_2 = a(1 - \cos\theta)$$

の形となる．そこで $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ に限ると，$x_2 > 0$ の部分が極値曲線の場となり，原点 O と点 $A(a_1, a_2)$ を結ぶ曲線の中で積分（(1) の T）を極小にするものがサイクロイドであることがわかる．

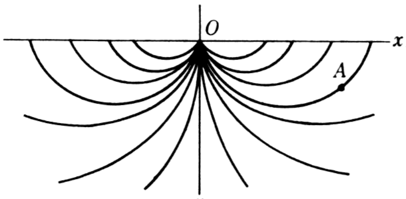


図 7

Q．s を (28) の形に直すあたりが大変うまいようですね．

A．その通りです．これからあと，共役点のようなことが重要な話題となるのですが，この辺でやめておきます．

Q．これだけでもまだゆっくり考えないとわかりません．なかなかしんどいですね．

練　習　問　題

1. 117ページの例で，$f = \sqrt{x_2}$ の場合に点 $(0, a)$ を一端とする極値曲線の場を作れ．
2. 117ページの $J[y]$ については，極大極小の判定は $L_{y'y'}$ の符号できまることを示せ．

答とヒント

1. 極値曲線 $x_2 = \frac{x_1^2}{4c^2} + \frac{b}{c} x_1 + a \ (b^2 + c^2 = a)$，その包絡線は $x_2 = \frac{x_1^2}{4a}$ で，各極値曲線は包絡線との接点で打切る．
2. $F(x_1, x_2, y_1, y_2) = y_1 L(x_1, x_2, z) \ \left(y_1 > 0, \ z = \frac{y_2}{y_1} \right)$ として考えよ．

第11章 解析力学と微分形式

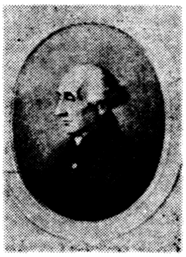
前回は古典的な変分法の理論を，微分形式を活用して扱うことを述べたのであるが，今回はこの結果を使って，解析力学の基本を微分形式によって見透しのよい形で示し，さらに一般のハミルトンの関数に基づく体系の研究にも役立つようにする．もともと，このことがエリー・カルタンが外微分を中心とする微分形式の活用を創始した端緒ともみられ，それは，

E. Cartan : Leçons sur les invariants intégraux (1921)

に詳しく述べられている．しかし，この書物の書かれたころは，多様体の基礎もまだ出来ていないし，微分 dx, dy などの意味も今日のように明確ではなかった．実は，逆にこの書物がそうしたことの明確化の1つの動機を与えたともいわれている．そして，多様体やその接空間，双対接空間をもとにした微分形式の近代的構成（この講座の第2,3章でお話ししたこと）が出来上っていったのである．したがって，今回の話は，そのふるさとへ新しい装いで帰って行くことともいえよう．

邦訳は，
外微分形式の理論
（矢野健太郎訳，
白水社）

1. 解析力学におけるラグランジュの方程式



ラグランジュ
J. L. Lagrange
(1736-1813)

まず，3次元の空間で質点の直角座標を (x_1, x_2, x_3) とし，これがポテンシャル $U=U(x,t)=U(x_1,x_2,x_3,t)$ をもった力の場でどう運動するかということは，ニュートンの運動方程式

$$m\frac{d^2x_i}{dt^2}=-\frac{\partial U}{\partial x_i} \qquad (i=1,2,3) \tag{1}$$

によって定まる．ところが，この微分方程式は，ある変分問題についてのオイラーの微分方程式になっている．それは次のようである．

3つの関数 $x_i=x_i(t)$ $(i=1,2,3)$ に対して，

$$L=L(t,x,\dot{x})=\frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{3}\dot{x}_i{}^2-U \qquad \left(\dot{x}_i=\frac{dx_i}{dt}\right) \tag{2}$$

とおくとき，変分問題

$$J[x]=J[x_1,x_2,x_3]=\int_{t_1}^{t_2}L(t,x,\dot{x})dt \tag{3}$$

に関するオイラーの微分方程式

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)=0 \tag{4}$$

$\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$ の計算では，$\dot{x}_i$ をも独立変数とみる．

がちょうど運動方程式(1)になっている．つまり，変分問題(3)の極値曲線 $x_i=x_i(t)$ が質点の軌道になっているわけで，これが解析力学の最初の眼目である．

Q. 大体わかりますが，ただ前回は関数が1つの変分問題

$$\int_{x_1}^{x_2} L(x, y, y')dx$$

についての極値問題でした．ここでは，x が t, y が x_1, x_2, x_3 になっていますが，同じようにやれるのですね．

A．そうです．全く同じようにオイラーの方程式が導かれるのです．

Q．(1) を (4) のように考えると，どんなつごうのよいことがあるのでしょうか．

A．それは，(1) は直角座標での式ですが，(4) のようにすると，極座標などどんな座標についてもいえることなのです．それだけでなく，次のようになります．

質点が k 個あって，それらの点の質量を m_i, 直角座標を (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}) $(i=1,2,\cdots,k)$ とするとき，関数 $x_{ij}(i=1,2,\cdots,k\,;\,j=1,2,3)$ は $3k$ 個あるが，これらについて束縛があって，適当な変数 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ をとると，

$$x_{ij}=f_{ij}(q_1, q_2, \cdots, q_n, t) \tag{5}$$

となっていて，関数行列

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_{11}}{\partial q_1} & \dfrac{\partial f_{12}}{\partial q_1} & \dfrac{\partial f_{13}}{\partial q_1} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f_{k1}}{\partial q_1} & \dfrac{\partial f_{k2}}{\partial q_1} & \dfrac{\partial f_{k3}}{\partial q_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_{11}}{\partial q_n} & \dfrac{\partial f_{12}}{\partial q_n} & \dfrac{\partial f_{13}}{\partial q_n} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f_{k1}}{\partial q_n} & \dfrac{\partial f_{k2}}{\partial q_n} & \dfrac{\partial f_{k3}}{\partial q_n} \end{pmatrix}$$

の階数は n であるとする．そうすると，運動のエネルギーは，

$$\begin{aligned} T&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} m_i((\dot{x}_{i1})^2+(\dot{x}_{i2})^2+(\dot{x}_{i3})^2) \\ &=\frac{1}{2}\sum_{ij} a_{ij}(q,t)\dot{q}_i\dot{q}_j+\sum_i b_i(q,t)\dot{q}_i+c(q,t) \end{aligned} \tag{6}$$

$\sum a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$ は，$\dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n$ について正定符号の２次形式である．

の形にかける．また，この系に働らく一般化された力がポテンシャル $U=U(q,t)$ から導かれるものであるとき，$L=T-U$ とおいて，

$$L=L(t, q, \dot{q})=L(t, q_1, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n)$$

を考えると，運動方程式は，(4) と同じ形

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{7}$$

で表わされる．これが，ラグランジュの方程式である．

Q．力学の本では，これを出すまでに，少し手間がかかったことを覚えています．これからまた，ハミルトンの関数 H を導くのでしたね．

A．そうです．ここで，前回のことが関連してくるのです．これからあと，$q_1, q_2, \cdots, q_n$ の代わりに改めて $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を使うことにします．

2. ハミルトンの方程式

前回に考えたことによると，$x=(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})$ とし，関数

$$F(x, y)=F(x_1, \cdots, x_{n+1}, y_1, \cdots, y_{n+1})$$

があって，これは y については正１次同次関数であり，$n+1$ 次の正方行列

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_j \partial y_k}\right) \text{ の階数は } n$$

ハミルトン
W. R. Hamilton
(1805–1865)

とする．このとき，媒介変数として t の代わりに u を使って，変分問題

$$J[x]=\int_{u_1}^{u_2} F\left(x_1, \cdots, x_{n+1}, \frac{dx_1}{du}, \cdots, \frac{dx_{n+1}}{du}\right)du \tag{8}$$

を考えると，その極値曲線は次のようにして得られる．まず，

$$p_j=\frac{\partial F}{\partial y_j} \qquad (j=1, 2, \cdots, n+1) \tag{9}$$

とおくと，$p_1, \cdots, p_{n+1}$ は

$$H(x, p)=H(x_1, \cdots, x_{n+1}, p_1, \cdots, p_{n+1})=0 \tag{10}$$

という形の関係をみたしている．このとき，局所的には $p_1, \cdots, p_{n+1}$ の 1 つを他の変数で表わすことができる．たとえば，

$$p_{n+1}=-h(x_1, \cdots, x_{n+1}, p_1, \cdots, p_n) \tag{11}$$

これを H 曲面と呼ぶことにする．そこで，H 曲面の上で，

$$\omega=\sum_{j=1}^{n+1} p_j dx_j \tag{12}$$

という 1 次微分式を考え，これを基本として研究を進める．H 曲面が (11) の形で書かれているときは，

$$\omega=\sum_{i=1}^{n} p_i dx_i - h dx_{n+1} \tag{13}$$

で，その外微分 $d\omega$ をとると，

$$d\omega=\sum_{i=1}^{n} \rho_i \wedge \theta_i \tag{14}$$

ここで，

$$\theta_i=dx_i-\frac{\partial h}{\partial p_i}dx_n, \qquad \rho_i=dp_i+\frac{\partial h}{\partial x_i}dx_n \tag{15}$$

そして，(8) の e 曲線は，

$$\theta_i=0, \qquad \rho_i=0 \qquad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{16}$$

の解 $x_i=\varphi_i(x_{n+1})$, $p_i=\psi_i(x_{n+1})$ から得られる．

e 曲線から導かれる曲線 $x_j=x_j(u)$ $(j=1, 2, \cdots, n+1)$ が(8)の極値曲線．

Q．これが前回伺ったことですね．もっとも $n=1$ の場合でしたが，それは一般の場合にも同じですね．

A．そうです．そこで，このことを今考えている力学の場合に適用してみようというのです．そのため，まず上の (13) を前節の L で表わすことをやっておきます．

$F(x, y)$ は y について正 1 次同次関数であるから，$y_{n+1}>0$ として，

$$\begin{aligned} F(x, y) &= F(x_1, \cdots, x_{n+1}, y_1, \cdots, y_{n+1}) \\ &= y_{n+1} F\left(x_1, \cdots, x_{n+1}, \frac{y_1}{y_{n+1}}, \cdots, \frac{y_n}{y_{n+1}}, 1\right) \end{aligned} \tag{17}$$

そこで，$\qquad x_{n+1}=t, \quad z_i=\dfrac{y_i}{y_{n+1}} \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$

$$F\left(x_1, \cdots, x_{n+1}, \frac{y_1}{y_{n+1}}, \cdots, \frac{y_n}{y_{n+1}}, 1\right)=L(t, x_1, \cdots, x_n, z_1, \cdots, z_n)$$

とおくと，

$$y_i=\frac{dx_i}{du} \quad (i=1, 2, \cdots, n), \qquad y_{n+1}=\frac{dx_{n+1}}{du}=\frac{dt}{du}$$

を (17) に代入することによって，(8) は次のようになる．

$$J=\int_{t_1}^{t_2} L\left(t,\, x_1, \cdots, x_n,\, \frac{dx_1}{dt}, \cdots, \frac{dx_n}{dt}\right)dt \tag{18}$$

いま，　$F(x, y)=y_{n+1}L(t, x, z),\qquad z_i=\dfrac{y_i}{y_{n+1}}$

したがって，(9) について $i=1, \cdots, n$ のときは，

$$p_i=\frac{\partial F}{\partial y_i}=y_{n+1}\frac{\partial L}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial y_i}=y_{n+1}\frac{\partial L}{\partial z_i}\frac{1}{y_{n+1}}=\frac{\partial L}{\partial z_i}$$

また，

$$\begin{aligned} p_{n+1}&=\frac{\partial F}{\partial y_{n+1}}=L+y_{n+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial y_{n+1}} \\ &=L+y_{n+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial z_i}\left(-\frac{y_i}{{y_{n+1}}^2}\right)=L-\sum_{i=1}^{n}z_i\frac{\partial L}{\partial z_i} \end{aligned}$$

つまり，　$$p_i=\frac{\partial L}{\partial z_i}\qquad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{19}$$

また，　$$H=\sum_{i=1}^{n}z_i\frac{\partial L}{\partial z_i}-L \tag{20}$$

とおくことによって，(12) は次のようになる．

$$\Omega=\sum_{i=1}^{n}p_i dx_i-Hdt \tag{21}$$

結局これは

> $x_{n+1}=t$ とおいて変分問題 (8) を (18) の形に表わすとき，(8) についての基本の 1 次微分式 (13) は (21) の形になる．

この場合の e 曲線の方程式 (16) は，

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\qquad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i} \tag{22}$$

となる．これが，ハミルトンの方程式である．

Q．力学の本で，(20) という式が出てきたとき，どうしてこの式を導いたのかわかりませんでしたが，これで少しわかりました．やはり t という変数の特殊性がものをいっているわけですね．

A．そういえるでしょう．

ふつうの力学の問題では，

$$L=T-U,\qquad U=U(x, t),$$

T は運動のエネルギーで，(6) からわかるように，

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,j}a_{ij}(x, t)\dot{x}_i\dot{x}_j+\sum_i b_i(x, t)\dot{x}_i+c(x, t)$$

となっている．$\dot{x}_i$ の代わりに z_i とかいて，

$$p_i=\frac{\partial(T-U)}{\partial z_i}=\sum_j a_{ij}z_j+b_i$$

行列 (a_{ij}) の逆行列を (A_{ij}) とかいて，　$z_i=\sum_j A_{ij}(p_j-b_j)$

したがって，(20) から，

$$H=\sum_i z_i p_i - L = \sum_{ij} A_{ij}(p_j-b_j)p_i-(T-U)$$

ここで，

$$T=\frac{1}{2}\sum_{ijkh} a_{ij}A_{ik}(p_k-b_k)A_{jh}(p_h-b_h)+\sum_{ij} b_i A_{ij}(p_j-b_j)+c$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{ij} A_{ij}(p_i-b_i)(p_j-b_j)+\sum_{ij} A_{ij}(p_j-b_j)b_i+c$$

となって，

$$H=\frac{1}{2}\sum_{ij} A_{ij}(p_i-b_i)(p_j-b_j)-c+U$$

以下の話は，もっと一般の H について考えていくことにする．

3．軌道と積分不変式

一般に，M を n 次元の多様体，その局所座標を $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ とし，M の上の双対接バンドルの点（各点とそこでの共変ベクトルとを併せて考えたもの）を $(x, p)=(x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n)$ とする．さらに時間 t をも考えに入れて，関数

この場合の (x, p) のつくる空間をふつう相空間 (phase space) という．

$$H(t, x, p)=H(t, x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n) \tag{23}$$

が与えられているとき，これを広い意味での力学系という．

このとき，(t, x, p) の空間での1次微分式

$$\Omega=\sum_{i=1}^{n} p_i dx_i - Hdt \tag{24}$$

を考え，$d\Omega$ を作ると，

$$d\Omega=\sum_i dp_i\wedge dx_i - dH\wedge dt$$
$$=\sum_i dp_i\wedge dx_i-\left(\sum_i \frac{\partial H}{\partial x_i}dx_i+\sum_i\frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i+\frac{\partial H}{\partial t}dt\right)\wedge dt$$

そこで， $$\theta_i=dx_i-\frac{\partial H}{\partial p_i}dt, \quad \rho_i=dp_i+\frac{\partial H}{\partial x_i}dt \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{25}$$

とおくと， $$d\Omega=\sum_{i=1}^{n}\rho_i\wedge\theta_i \tag{26}$$

そして， $$\theta_i=0, \quad \rho_i=0 \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{27}$$

つまり， $$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i} \tag{28}$$

の解として得られる曲線 $x=x(t)$, $p=p(t)$ をこの力学系の軌道と呼ぶことにする．

Q．ここまでは前節までのことを整理しているだけですね．

A．そうです．これからの話は，この H だけからきまることですから，こうした一般論として話を進めるわけです．

まず，(26) (27) から次のことがいえる．

定理 1．力学系の軌道 c の上に点 $(t_1, x^{(1)}, p^{(1)})$, $(t_2, x^{(2)}, p^{(2)})$ をとるとき，これを結ぶ曲線の集まりの中で，c は $\int\Omega$ の停留値を与えるものである．

極値 → 停留値，逆はいえない．

証明．この曲線の集まりの中から１つの径数 ε をもつものをとって，

$$x=x(t,\varepsilon),\qquad p=p(t,\varepsilon)$$

を考え，軌道 c は $\varepsilon=0$ の場合であるとする．そこで，

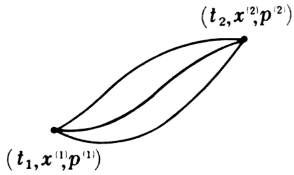


図 1

$$\left[\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\int\Omega\right]_{\varepsilon=0}=0$$

を証明すればよい．$\varepsilon=0$ の場合に軌道となるのであるから，(27) によって，

$$\left[\theta_i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right]_{\varepsilon=0}=0,\qquad\left[\rho_i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right]_{\varepsilon=0}=0 \tag{29}$$

$\theta_i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)=\frac{dx_i}{dt}-\frac{\partial H}{\partial p_i}$

$\rho_i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)=\frac{dp_i}{dt}+\frac{\partial H}{\partial x_i}$

そこで，まず，

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\int\Omega=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\int_{t_1}^{t_2}\Omega\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)dt=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Omega\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)dt$$

(26) によると，

$$d\Omega\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon},\frac{\partial}{\partial t}\right)=\sum_i(\rho_i\wedge\theta_i)\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon},\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

つまり，

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Omega\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\Omega\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right)=\sum_i\left(\rho_i\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right)\theta_i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)-\rho_i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\theta_i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) \tag{30}$$

したがって，(29) (30) によって，

$$\left[\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\int\Omega\right]_{\varepsilon=0}=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\Omega\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right)\right]_{\varepsilon=0}dt=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\Omega\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right)\right]_{\varepsilon=0}dt$$

$$=\left[\left[\Omega\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right)\right]_{\varepsilon=0}\right]_{t_1}^{t_2}=\left[\left[\sum_i p_i\frac{\partial x_i}{\partial\varepsilon}-H\frac{\partial t}{\partial\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0}\right]_{t_1}^{t_2}=0 \qquad \text{(証明終)}$$

次に，いくつかの径数をもった (28) の解(軌道)の集まりを考え，これを

$$x_i=x_i(t,\alpha_1,\cdots,\alpha_k),\qquad p_i=p_i(t,\alpha_1,\cdots,\alpha_k) \tag{31}$$

とすると，

$$\theta_i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)=0,\qquad\rho_i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)=0$$

したがって，(30) によって，

$$d\Omega\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial\alpha_l}\right)=0\qquad(l=1,2,\cdots,k)$$

となり，$d\Omega$ を (31) によって $t,\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ で表わしたものを，

$$d\Omega=\sum_{ij}A_{ij}d\alpha_i\wedge d\alpha_j+\sum_i B_i dt\wedge d\alpha_i$$

とすると，$B_l=0$ $(l=1,2,\cdots,k)$ となって，

$$d\Omega=\sum_{ij}A_{ij}d\alpha_i\wedge d\alpha_j. \tag{32}$$

ここで，$A_{ij}=-A_{ji}$ としておく．このとき，A_{ij} は $t,\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ の関数であるが，

$$d(d\Omega)=0$$

であることから，

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial t}dt\wedge d\alpha_i\wedge d\alpha_j=0\qquad \text{ゆえに}\qquad \frac{\partial A_{ij}}{\partial t}=0$$

となって，(32) は $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ だけの式となる．したがって，次のことがいえる．

定理 2. 軌道の集まり (31) について考えた

$$d\Omega=\sum_i dp_i\wedge dx_i-dH\wedge dt=\sum_i\left(dp_i+\frac{\partial H}{\partial x_i}dt\right)\wedge\left(dx_i-\frac{\partial H}{\partial p_i}dt\right)$$

は t に関係なく，$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ だけの微分形式である．

そこで，時刻 t を一定にして Ω から　$\omega=\sum_i p_i dx_i$
とおくと，

$$d\omega=\sum_i dp_i\wedge dx_i$$

も $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ だけの微分形式であることが，定理 2. によってわかる，したがって，

定理 3. 時刻 t_1 における (x,p) を，これを通る軌道の上で動かし，時刻 $t_2=t_1+c$ (c は定数) における (x',p') へ移すとき，$d\omega$ は変わらない．
つまり，

$$\sum_i dp_i'\wedge dx_i'=\sum_i dp_i\wedge dx_i$$

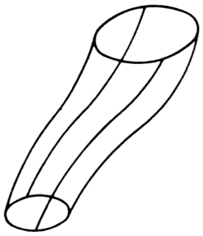
2 つの径数 α_1,α_2 をもった軌道の集まりで，点 (α_1,α_2) が単一連結の領域 D を作っているときは，その周を c とすると，

$$\int_D d\omega=\int_C\omega$$

となるので，

$$\int_C\omega=\int_C\sum_i p_i dx_i$$

が定理 3. の写像で不変となっていることがわかる．


図 2

定理 3. によって，

$$(d\omega)^2=d\omega\wedge d\omega,\qquad (d\omega)^3=d\omega\wedge d\omega\wedge d\omega,\ \cdots\cdots$$

などの不変性も導かれ，とくに径数の数が $2n$ 個のときは，

$$(d\omega)^n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n!\ dp_1\wedge\cdots\wedge dp_n\wedge dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$$

が不変であることがわかる．そこで，相空間で，

$$dV=dp_1\wedge\cdots\wedge dp_n\wedge dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$$

によって体積素片を定義すると，

相空間での体積は，定理 3. で示した写像 $(x,p)\to(x',p')$ によって変わらない

といえる．

Q．このことは，一度聞いたことがあります．たしか，リュービルの定理とかいったように記憶しています．

リュービル
Liouville
(1809-1889)

A．そうです．よく憶えていましたね．

4. 自　律　系

力学系では，一般には H は x,p,t の関数であるが，とくに，H が t をふくまない場合を自律系という．このとき，

自律系…
autonomous system

ハミルトンの方程式の解（つまり軌道）に沿っては，$H(x,p)$ は一定となっている．それは，(28) によって，

$$\frac{dH}{dt}=\sum_i\left(\frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}+\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt}\right)=0$$

となるからである．したがって，各軌道は，

$$H(x,p)=E \quad (\text{一定}) \tag{33}$$

という面の上にあることになる．この曲面を等エネルギー曲面という．これからこの曲面の上での考察を行なってみよう．

Q．今までに学んだことからいいますと，123ページの (10) が想い出されます．(33) は

$$H(x,p)-E=0 \tag{34}$$

とおくと，次元は1つちがいますが (10) の形ですね．これと何か結びつくのではありませんか．

A．その通りです．そこで，この点を少しくわしく考えてみましょう．

一般に，$F(x,y)=F(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)$ が y について正1次同次で，

$$\text{行列}\ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_i\partial y_j}\right)\ \text{の階数が}\ n-1$$

のとき，変分問題

$$J[x]=\int_{u_1}^{u_2}F\left(x_1,\cdots,x_n,\frac{dx_1}{du},\cdots,\frac{dx_n}{du}\right)du \tag{35}$$

を考えるのには，$p_i=\dfrac{\partial F}{\partial y_i}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ とおくと，

$$H(x,p)=H(x_1,\cdots,x_n,p_1,\cdots,p_n)=0 \tag{36}$$

の形の等式が得られる．この上で，$\sum_i p_idx_i$ をもとにしてこの変分問題を研究することができたわけである．この場合，(36) については，$p_1,\cdots,p_n$ の1つが残りの p_i と $x_1,\cdots,x_n$ で表わされるのであった．たとえば，

$$p_n=-h(x_1,\cdots,x_n,p_1,\cdots,p_{n-1}) \tag{37}$$

この面を H 曲面と呼んだのである．

そこで，こんどは逆に，

(36) を H 曲面にもつ変分問題 (35) が作れる

ことを示そう．ただし，$a,b=1,2,\cdots,n-1$ として，

$$\text{行列}\ \left(\frac{\partial^2 h}{\partial p_a\partial p_b}\right)\ \text{の階数は}\ n-1 \tag{38}$$

としておく．そのためには，

$$z_a=\frac{\partial h}{\partial p_a} \qquad (a=1,2,\cdots,n-1) \tag{39}$$

とおいて，これから，$p_1,\cdots,p_{n-1}$ を $x_1,\cdots,x_n,z_1,\cdots,z_{n-1}$ の関数と考える．これが (38) によって可能である．そこで，

$$z_a=\frac{y_a}{y_n} \qquad (a=1,2,\cdots,n-1) \tag{40}$$

とおいて，$x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n$ の関数

$$F(x, y)=\sum_{a=1}^{n-1} p_a y_a - h(x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_{n-1}) y_n$$

を作ると，これは $y=(y_1, \cdots, y_n)$ について1次同次関数である．さらに，

$$\frac{\partial F}{\partial y_a}=p_a+\sum_{b=1}^{n-1} \frac{\partial p_b}{\partial y_a} y_b-\sum_{b=1}^{n-1} \frac{\partial h}{\partial p_b} \frac{\partial p_b}{\partial y_a} y_n$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_n}=\sum_{a=1}^{n-1} \frac{\partial p_a}{\partial y_n} y_a-\sum_{a=1}^{n-1} \frac{\partial h}{\partial p_a} \frac{\partial p_a}{\partial y_n} y_n-h$$

(39) (40) によって，これらは

$$\frac{\partial F}{\partial y_a}=p_a, \qquad \frac{\partial F}{\partial y_n}=-h$$

したがって，(37) がこの F に対する H 曲面になっている．

最後に，

$$\text{行列} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_j}\right) \text{ の階数が } n-1 \tag{41}$$

であることは，次のようにして確かめられる．

(39) (40) によって，

$$y_a=y_n \frac{\partial h}{\partial p_a}$$

両辺を y_c $(c=1,2, \cdots, n-1)$ で偏微分して，

$$\delta_{ac}=y_n \sum_{b=1}^{n-1} \frac{\partial^2 h}{\partial p_a \partial p_b} \frac{\partial p_b}{\partial y_c}=y_n \sum_{b=1}^{n-1} \frac{\partial^2 h}{\partial p_a \partial p_b} \frac{\partial^2 F}{\partial y_b \partial y_c}$$

したがって，

$$\text{行列} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_b \partial y_c}\right) \text{ の階数は } n-1$$

であることがわかって，(41) が導かれたことになる．

Q．一応わかります．ところで，(36) を (37) のように考えるわけですが，この形に直すのは，一般には大変でしょう．

A．その通りです．そこで，(36) を (37) の形にしないで F を求める方法を考えておきましょう．それには，(36) で p_n が (37) の形だとして両辺を p_a で偏微分しますと，

$$\frac{\partial H}{\partial p_a}-\frac{\partial H}{\partial p_n} \frac{\partial h}{\partial p_a}=0, \qquad \text{つまり，} \qquad \frac{\partial H}{\partial p_a}=\frac{\partial H}{\partial p_n} \frac{y_a}{y_n}$$

だから，

$$y_i=\lambda \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i=1,2, \cdots, n) \tag{42}$$

これを手懸りにして，次のように考えます．まず，H が与えられていますから，まだわかっていない λ の入った (42) を $p_1, \cdots, p_n$ について解いて，

$$p_i=K_i\left(x, \frac{y}{\lambda}\right)=K_i\left(x_1, \cdots, x_n, \frac{y_1}{\lambda}, \cdots, \frac{y_n}{\lambda}\right)$$

これを $H(x,p)=0$ へ代入した式から λ を求め，p_i を x,y で表わし，

$$F=\sum_{i=1}^{n} p_i y_i$$

として F をきめればよいのです．

Q．ちょっと待って下さい．(42) を $p_1,\cdots,p_n$ について解くことは，無条件ではできませんね．

A．その通りです．ここで，

$$\text{行列}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\right)\text{の階数が } n \tag{43}$$

を仮定しておきます．これは，無理のない仮定です．

Q．もう1つ，$H(x,p)=0$ から λ を求めるところはどうですか．

A．これも確かめられるのですが，計算がちょっと面倒ですから，ここでは省きます．

Q．これで，(34) の $H(x,p)-E$ を (36) の H のように考えてやればよいわけですね．

A．そうです．次に，最も基本的な場合を示しておきます．

例．　$H=\dfrac{1}{2}\sum_{ij} A_{ij}(x)p_i p_j+U(x)$，　$\det(A_{ij}(x))\neq 0$

$H-E$ を考えて，

$$y_i=\lambda\frac{\partial(H-E)}{\partial p_i}=\lambda\sum_j A_{ij}p_j$$

(A_{ij}) の逆行列を (a_{ij}) として，

$$p_i=\frac{1}{\lambda}\sum_j a_{ij}y_j$$

これを $H(x,p)-E=0$ へ代入して，

$$\frac{1}{2\lambda^2}\sum_{ij} a_{ij}y_i y_j+U-E=0$$

したがって，

$$F=\sum_i p_i y_i=\frac{1}{\lambda}\sum_{ij} a_{ij}y_i y_j=\pm\sqrt{2(E-U)\sum_{ij} a_{ij}y_i y_j}$$

つまり，この力学系の軌道で，$H=E$ であるものは，変分問題

$$\int_{u_1}^{u_2}\sqrt{2(E-U)\sum_{ij} a_{ij}\frac{dx_i}{du}\frac{dx_j}{du}}\,du$$

の極値曲線に対応するものである．(モーペルチュイの原理)

モーペルチュイ
Maupertuis
(1698-1759)

Q．これは (a_{ij}) が正定符号ですと，リーマン空間になりますね．それにしても，今回のお話しは，大体，力学で聞いたことのあることでしたが．

A．その通りです．これを微分形式を活用してお話ししたわけです．

第12章　フロベニウスの定理

微分形式の理論において，完全積分可能な微分方程式系についてのフロベニウスの定理というのは，基本的なものの１つで，本来はこの講座でももっと早く述べるべきものであったかもしれない．しかし，その応用例を示すのには，動座標系の方法などのような，微分形式を実際に利用することに慣れてからのほうが，つごうがよい．今回は，フロベニウスの定理の証明と応用を示すことにする．

フロベニウス
G. Frobenius
(1849-1917)

1．完全積分可能な微分方程式系

変数 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に関する１次微分式

$$\omega=\sum_{i=1}^{n} a_i(x)dx_i$$

において，$\omega=du$，つまり ω が $u=u(x)$ の全微分になっているときは，

$$d\omega=0.$$

逆に，この式が成り立てば，局所的には $\omega=du$ となるのであった．

ところが，

$$\omega=0$$

という微分方程式を考えると，ω が全微分でなくても，

$$\omega=pdu \qquad (p=p(x))$$

であれば，u＝一定という解がある．このときは，

$$d\omega=dp\wedge du=(p^{-1}dp)\wedge pdu=(p^{-1}dp)\wedge\omega$$

となっている．そこで逆に，

$$d\omega=\rho\wedge\omega\ (\rho \text{ は１次微分式})$$

が成り立つときを考えると，局所的に $\omega=pdu$ となっていることが証明できる．こうしたことをもっと一般に考えていこうというわけである．

Q．２変数の場合 $\omega=a_1(x)dx_1+a_2(x)dx_2$ には，つねに $\omega=pdu$ の形になるということをどこかで習ったように思いますが，３変数以上では一般にはそうならないのですか．

A．その通りです．一般に n 変数の１次微分式 ω は，独立な関数 $u_0, u_1, \cdots, u_k, p_1, \cdots, p_k (k\leqq n/2)$ を使って，

$$du_0+\sum_{i=1}^{k} p_i du_i, \qquad \sum_{i=1}^{k} p_i du_i$$

のどちらかの形に表わせることがわかっているのです．これはパフの問題といって，証明は少し手数がかかります．この講座ではそこまではお話しません．

パフ J.F. Pfaff 1765–1825

点 $x=(x_1, \cdots, x_r)$ のつくる r 次元の空間(局所多様体)の中で，$dx_1, dx_2, \cdots, dx_r$ について1次独立な n 個の1次微分式

以下，関数はすべて C^∞ 級としておく．$n<r$ とする．

$$\omega_i=\sum_{p=1}^{r} a_{ip}(x)dx_p \quad (i=1, \cdots, n) \tag{1}$$

を考え，微分方程式系

$$\omega_i=0 \quad (i=1, \cdots, n) \tag{2}$$

を作る．部分多様体

$$x_p=\varphi_p(u_1, \cdots, u_k) \quad (p=1, \cdots, r) \tag{3}$$

に沿って(2)が成り立っているとき，この部分多様体を(2)の解または積分多様体という．とくに，次のような解があるとき，(2)は完全積分可能であるという．

完全積分可能 completely integrable

$$\begin{cases} F_i(x_1, \cdots, x_r)=c_i \quad (i=1, \cdots, n) \\ \qquad c_1, \cdots, c_n \text{ はある領域内の任意の値} \\ n\times r \text{ 行列 } \left(\dfrac{\partial F_i}{\partial x_p}\right) \text{ の階数は } n \end{cases} \tag{4}$$

つまり，これは $r-n$ 次元の多様体である．

この完全積分可能ということは，次のように言い表わすこともできる．

$\omega_i=0 \quad (i=1, 2, \cdots, n)$ が完全積分可能

$$\rightleftarrows \begin{cases} \text{適当に変数変換} \quad x_p=\varphi_p(y_1, \cdots, y_r) \ (p=1, \cdots, r) \\ \text{を行なうと，} \\ \qquad \omega_i=\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(y_1, \cdots, y_r)dy_j \\ \text{となる．} \end{cases} \tag{5}$$

ここで変数変換というのは，C^∞ 級の1対1の対応で，r 次の行列式 $\det\left(\dfrac{\partial\varphi_p}{\partial y_q}\right)\neq 0$ となるものである．

証明．→は次のように示される．いま，条件(4)が成り立つから，

$$\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)\neq 0 \quad (i, j=1, \cdots, n)$$

として考えることにする．そこで，

$$\begin{aligned} y_i&=F_i\ (x_1, \cdots, x_r) & (i&=1, \cdots, n) \\ y_\alpha&=x_\alpha & (\alpha&=n+1, \cdots, r) \end{aligned}$$

とおいて，座標を $x_1, \cdots, x_r$ から $y_1, \cdots, y_r$ へ変えると，

$$\omega_i=\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(y_1, \cdots, y_r)dy_j+\sum_{\alpha=n+1}^{r} b_{i\alpha}(y_1, \cdots, y_r)dy_\alpha$$

の形となる．そして，$c_1, \cdots, c_n$ は定数とすると，

$$y_i=c_i \quad (i=1, \cdots, n)$$

に対して $\omega_i=0$ となることから，$b_{i\alpha}(c_1, \cdots, c_n, y_{n+1}, \cdots, y_r)=0$，$c_1, \cdots, c_n$ は任意だから，$b_{i\alpha}(y_1, \cdots, y_r)=0$ となって(5)を得る．

←― は次のようである．

(1)の ω_i が1次独立であることから(5)についてもそうである．したがって $\omega_i=0$ $(i=1, \cdots, n)$ から，

一般に n 個の1次式の組 $\sum_p a_{ip}X_p$ が1次独立のとき，正則な変数変換を行なっても1次独立に変わりはない．

$$dy_i=0, \qquad y_i=c_i \qquad (i=1, \cdots, n)$$

$y_i=F_i(x_1, \cdots, x_n)$ $(i=1, \cdots, n)$ とおくと (4) が成り立っている．

Q．これで完全積分可能ということの正体がよくわかったような気がします．変数をうまくとると (5) の形になって，微分は $dy_1, \cdots, dy_n$ の n 個だけになるというのですね．

A．そうです．しかし，係数は $y_1, \cdots, y_r$ の関数です．はじめの条件は，$(x_1, \cdots, x_r)$ のつくる r 次元の空間で，ある領域内の任意の点を通って $n-r$ 次元の積分多様体が 1 つずつあるということです．

微分方程式系の完全積分可能性は，外微分を使って次のように言い表わすことができる．これがフロベニウスの定理である．

定理

$$\omega_i=\sum_{p=1}^{r} a_{ip}(x_1, \cdots, x_r)dx_p \quad (i=1, \cdots, n) \tag{6}$$

が 1 次独立な微分形式のとき，微分方程式系

$$\omega_i=0 \quad (i=1, \cdots, n) \tag{7}$$

が完全積分可能となるための必要十分条件は，$d\omega_i$ が

$$d\omega_i=\sum_{j=1}^{n} \omega_j \wedge \rho_{ji} \quad (i=1, \cdots, n) \tag{8}$$

の形に表わされることである．

証明．まず，完全積分可能であるとすれば，前ページで述べたことから適当な座標 $y_1, \cdots, y_r$ をとることによって，

$$\omega_i=\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(y_1, \cdots, y_r)dy_j \quad (i=1, \cdots, n) \tag{9}$$

となる．したがって，

$$d\omega_i=\sum_j db_{ij}\wedge dy_j \tag{10}$$

ところが，(9) は 1 次独立だから $dy_1, \cdots, dy_n$ を ω_i で表わして

$$dy_i=\sum_j c_{ij}(y_1, \cdots, y_r)\omega_j$$

とし，これを(10)の右辺に代入すれば (8) の形になることがわかる．

次に，(8) が成り立つとして (7) が完全積分可能であることを示そう．

(6) は 1 次独立であるから，n 行 r 列の行列 (a_{ip}) の階数は n で，これから作られる n 次の行列式の中には，0 でないものがある．そこで，

$$\det(a_{ij})\neq 0 \quad (i, j=1, \cdots, n)$$

として考えよう．このときは，(7) を dx_i $(i=1, \cdots, n)$ について解いて，

$$dx_i=\sum_{\alpha=n+1}^{r} s_{i\alpha}(x_1, \cdots, x_r)dx_\alpha \quad (i=1, \cdots, n) \tag{11}$$

いま，$x_\alpha^{(0)}$, l_α $(\alpha=n+1, \cdots, r)$ は任意の定数，t を変数として，

$$x_\alpha=x_\alpha^{(0)}+l_\alpha t \tag{12}$$

とおくと，(11)は次のようになる．

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_\alpha s_{i\alpha}(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}^{(0)}+l_{n+1}t, \cdots, x_r^{(0)}+l_r t)\,l_\alpha \tag{13}$$

$$(i=1, \cdots, n)$$

これは t を変数にもつ関数 $x_1, \cdots, x_n$ についての常微分方程式である．これを，

$$t=0 \text{ のとき} \qquad x_i=c_i \qquad (i=1, \cdots, n) \tag{14}$$

という初期条件で解いたものを，

$$x_i=\varphi_i(t, l_{n+1}, \cdots, l_r, c_1, \cdots, c_n) \tag{15}$$

とすると，

$$c_i=\varphi_i(0, l_{n+1}, \cdots, l_r, c_1, \cdots, c_n) \tag{16}$$

そこで，$t, l_{n+1}, \cdots, l_r$ を変数とみて，(12), (15) を (6) に代入すると，(7) の成り立つことを示そう．

まず，$l_{n+1}, \cdots, l_r$ を一定とすれば，$x_i=\varphi_i$ は (13)，したがって(11)を満しているから $\omega_i=0$ となる．そこで$l_{n+1}, \cdots, l_r$ をも変数とみると，

$$\omega_i=\sum_\alpha h_{i\alpha}dl_\alpha \tag{17}$$

の形となる．$t=0$ では，任意の $l_{n+1}, \cdots, l_r$ に対して $x_i=c_i$, $x_\alpha=x_\alpha^{(0)}$ で $x_1, \cdots, x_r$ は一定だから，$dx_1=0, \cdots, dx_r=0$. したがって，

$$t=0 \text{ では} \qquad h_{i\alpha}=0 \tag{18}$$

といえる．

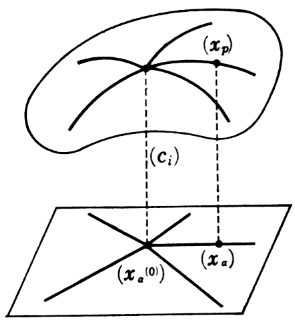


図1

そこで，(17) を (8) に代入する．このとき，

$$\rho_{ji}=p_{ji}dt+\sum_\alpha m_{ji\alpha}dl_\alpha$$

とおいて (8) の両辺で dt をふくむ項だけを較べると，

$$\sum_\alpha \frac{\partial h_{i\alpha}}{\partial t}dt\wedge dl_\alpha=-\sum_{k\alpha} h_{k\alpha}p_{ki}dt\wedge dl_\alpha$$

したがって，

$$\frac{\partial h_{i\alpha}}{\partial t}=-\sum_k h_{k\alpha}p_{ki}$$

ところが，(18)によると $t=0$ のとき $h_{i\alpha}=0$ だから，微分方程式の解の一意性によって，つねに $h_{i\alpha}=0$ となり，

$$\omega_i=0$$

一般に，微分方程式
$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_j a_{ij}(x,t)x_j$$
$(i, j=1, \cdots, n)$
で $t=0$ のとき $x_i=0$ となる解は，$x_i=0$ に限る．

つまり，$t, l_{n+1}, \cdots, l_r$ を変数とみると，(12), (15) はこの微分方程式系の解になっている．ここで，$t, l_{n+1}, \cdots, l_r$ は実は独立変数でなく，

$$\varphi_i(k^{-1}t, kl_{n+1}, \cdots, kl_r)=\varphi_i(t, l_{n+1}, \cdots, l_r) \tag{19}$$

が成り立っている．このことは，次のようにしてわかる．

まず，$\varphi_i(t, l_{n+1}, \cdots, l_r)$ は (13), (14) を満している．この式で，$t, l_{n+1}, \cdots, l_r$ の代わりに $k^{-1}t, kl_{n+1}, \cdots, kl_r$ とおくと，$x_i=\varphi_i(k^{-1}t, kl_{n+1}, \cdots, kl_r)$ について(13)が成り立つことがわかる．また，これについて(14)も成り立ち，微分方程式の解の一意性によって(19)が成り立つ．

(19)が成り立つから，$k=t$ として考えれば，結局 φ_i は，

$$l_{n+1}t=x_{n+1}-x_{n+1}^{(0)}, \cdots, l_rt=x_r-x_r^{(0)}$$

の関数と考えられる．

また，(16)によると，$x_{n+1}=x_{n+1}^{(0)}, \cdots, x_r=x_r^{(0)}$ では，

$$\det\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial c_j}\right)=\det(\delta_{ij})=1\neq 0$$

だから，その近くでは $x_i=\varphi_i(x_{n+1},\cdots,x_r,c_1,\cdots,c_n)$ を $c_1,\cdots,c_n$ について解いて，

$$c_i=F_i(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1},\cdots,x_r) \tag{20}$$

と考えることができる．これの上では $\omega_i=0$ となるわけである．さらに $c_1,\cdots,c_n$ は任意の値をとるから，

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)\text{の階数}=n$$

これで証明が終ったことになる．

Q．なかなか長い証明ですね．

A．しかし，応用の広いたいせつな定理ですから，証明のしがいがあります．

Q．これは局所的な定理ですね．証明では，(15)から(20)を出したり，微分方程式の解の存在を考えたり，随所にそれが出ています．

A．その通りです．したがって，解を出来るだけ延して考えることも研究されているのですが，ここではお話ししません．

Q．条件 (8) は式としてはわかりやすいのですが，実際にもその形で応用できるのですか．

A．このままの形で応用するときと，

$\omega_i=0$ $(i=1,\cdots,n)$ をみたす任意の $dx_1,\cdots,dx_r$ に対して，

$$d\omega_i=\sum_{p,q}m_{ipq}dx_p\wedge dx_q=0$$

という形で使うときがあります．

このあとの例としては，$\omega_i=0$ が(11)の形

$$dx_i=\sum_\alpha s_{i\alpha}dx_\alpha \tag{21}$$

の形に表わされている場合があります．考えてごらんなさい．

Q．それには，$\omega_i=dx_i-\sum_\alpha s_{i\alpha}dx_\alpha$ とおきますと，

$$d\omega_i=-\sum_\alpha ds_{i\alpha}\wedge dx_\alpha$$

$$=-\sum_{j\alpha}\frac{\partial s_{i\alpha}}{\partial x_j}dx_j\wedge dx_\alpha-\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial s_{i\alpha}}{\partial x_\beta}dx_\beta\wedge dx_\alpha$$

$$(i,j=1,\cdots,n:\ \alpha,\beta=n+1,\cdots,r)$$

右辺の dx_j へ (21) の式の dx_j を代入すると 0 になるというのが，定理の結論ですから，このことを式に表わしますと，結局，

$$\sum_j\left(\frac{\partial s_{i\alpha}}{\partial x_j}s_{j\beta}-\frac{\partial s_{i\beta}}{\partial x_j}s_{j\alpha}\right)+\frac{\partial s_{i\alpha}}{\partial x_\beta}-\frac{\partial s_{i\beta}}{\partial x_\alpha}=0 \tag{22}$$

割合に簡単になりました．

A．それで結構です．次にいくつかの応用を示しましょう．

2. 動座標系への応用

これまでは，主にユークリッド平面と3次元のユークリッド空間での動座標系について考えてきたが，ここでは n 次元のアファイン空間の場合をはじめに扱って，あとからユークリッド空間へ及ぶことにしよう．

n 次元アファイン空間の座標系は頂点 A と1次独立な n 個のベクトル $e_1, \cdots, e_n$ で与えられる．この座標系は $n+n^2$ 個のパラメーターをもっている．そうしたものの集まりについて，

$$dA=\sum_{i=1}^{n}\omega_i e_i, \quad de_i=\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}e_j \quad (i=1, \cdots, n) \tag{23}$$

とおくと，これらを外微分した式から，構造方程式

$$d\omega_i=\sum_{j}\omega_j\wedge\omega_{ji}, \quad d\omega_{ij}=\sum_{k}\omega_{ik}\wedge\omega_{kj} \tag{24}$$

が得られる．ここで考えようというのは，その逆である．

それは，$1\leqq s\leqq n+n^2$ とし，s 個の変数 $u=(u_1, \cdots, u_s)$ についての1次微分式

$$\omega_i=\sum_{t=1}^{s}a_{it}(u)du_t, \quad \omega_{ij}=\sum_{t=1}^{s}a_{ijt}(u)du_t$$

が与えられたとき，(23)をみたす

$$A=(x_1, \cdots, x_n), \quad e_i=(p_{i1}, \cdots, p_{in}) \quad (i=1, \cdots, n)$$

が存在するかということである．

この場合，(23)が前ページの(21)に当り，(24)が(22)に当るわけである．実際，(23)の両辺を外微分し，この式へ(23)を代入したものから得られるのが(24)であった．ただし，この場合，

$$e_1, \cdots, e_n \text{ が1次独立} \tag{25}$$

ということが使われる．そこで，(14)で(13)を解いた場合に当ることを考えると，

$$t=0 \text{ のとき，} A=A^{(0)}, \ e_i=e_i^{(0)} \tag{26}$$
$$\text{ここに，} e_1^{(0)}, \cdots, e_n^{(0)} \text{ は1次独立}$$

という初期条件で(23)を解いて得られる $e_1, \cdots, e_n$ については，(25)の成り立つことを示しておこう．それは次のようである．$e_1, \cdots, e_n$ の外積

$$\sigma=e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_n$$

については，計算によって，

$$d\sigma=(\sum_{i}\omega_{ii})\sigma$$

となることと，$t=0$ で $\sigma\neq 0$ であることから，つねに $\sigma\neq 0$.

ベクトルの外積は，成分でいえばそれらの作る行列式である．

Q．結局，構造方程式(24)というのは，積分可能条件なのですね．

A．その通りです．

次に，ユークリッド空間の単位直交系の場合には，

$$\omega_{ij}=-\omega_{ji} \quad (i, j=1, \cdots, n)$$

この条件があると，

$$t=0 \text{ のとき } e_i=e_i^{(0)}, \quad e_1^{(0)}, \cdots, e_n^{(0)} \text{ は単位直交系} \tag{27}$$

という初期条件で解いて得られる $e_1, \cdots, e_n$ はつねに単位直交系になっている．このこともこれまでしばしば示してきたところである．

Q．構造方程式が積分可能条件であるということは，どんなところへ応用されるのでしょうか．

A．応用は大変広くて，たとえば，ある条件を備えた図形や空間がほんとうにあるのか，いくつくらいあるのかといったことを調べるのにもよく使われます．次に，その１つを示しましょう．

3. 曲率0のリーマン空間への応用

n 次元のリーマン空間というのは，局所的にいうと，座標 $(x_1, \cdots, x_n)$ について，曲線の弧の長さの微分 ds が $dx_1, \cdots, dx_n$ についての正値の２次形式

$$ds^2=\sum g_{ij}(x_1, \cdots, x_n)dx_idx_j$$

で与えられるものである．この場合，各点の双対接空間の中に適当な基底 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ をとると，

ω_i は $x_1, \cdots, x_n$ についての１次微分式

$$ds^2=\sum_{i=1}^{n}\omega_i{}^2 \tag{28}$$

となる．このとき，

$$d\omega_i=\sum_j \omega_j\wedge\omega_{ji}, \qquad \omega_{ij}=-\omega_{ji} \tag{29}$$

となる ω_{ij} は１通りに定まり，これから作った

$$\Omega_{ij}=d\omega_{ij}-\sum_k \omega_{ik}\wedge\omega_{kj} \tag{30}$$

が曲率の微分形式であった．

とくにユークリッド空間では，直角座標 $x_1, \cdots, x_n$ について，

$$ds^2=\sum_{i=1}^{n}dx_i{}^2 \tag{31}$$

であるから，$\omega_i=dx_i$ とおくと(29)から $\omega_{ij}=0$. したがって(30)から，

$$\Omega_{ij}=d\omega_{ij}-\sum_k \omega_{ik}\wedge\omega_{kj}=0 \tag{32}$$

となる．そこで，逆に，

　　曲率の微分形式が０であるリーマン空間では，適当に座標をとると ds^2 が(31)の形になるか

ということを考えると，

　　局所的に正しい

ことが次のようにして示される．

前ページの(23)を考えると，(29), (32) によって完全積分可能で，初期条件(26), (27) に対して得られる解 $A, e_1, \cdots, e_n$ は単位直交系で，これはリーマン空間の各点に対して１つずつ定まる．したがって，(23)から，

$$(dA, dA)=\sum_i \omega_i{}^2=ds^2$$

いま，A の直角座標を $(X_1, \cdots, X_n)$ とすると，$ds^2=\sum_i dX_i{}^2$

Q．曲率の微分形式が０のリーマン空間は，ds^2 だけからいうとユークリッド空間と同じだというわけですね．

A．その通りです．

Q．局所的なお話しばかりですが，大局的にいうとどうなるのですか．

A．曲率の微分形式が0(単に曲率0という)のリーマン空間の大局的な形をきめる問題は，空間形問題といって基本的なものです．2次元の場合は完全にわかっていますが，次元が高いと難しいことがからんでくるのです．

ここでは，これまでのことを使って，

定理．2より大きい次元のユークリッド空間での等角写像は，反転，移動，またはそれらの合成によって得られるものに限る．

という有名な定理を証明してみよう．

Q．まず，等角写像というのは，空間の点全体をそれ自身の上へ1対1に写す写像で，対応する2つの線のつくる角の大きさを変えないものでしたね．

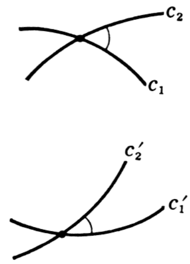


図2

A．そうです．移動(合同変換)や相似変換はもちろん等角写像ですが，そうでない等角写像として真先きに出てくるのが反転です．これは，定点Oと定数$k(>0)$があって，点Pに対し，半直線OP上にあって，

$$OP \cdot OP' = k$$

となるP'を対応させることです．

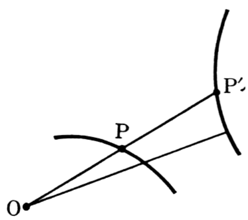


図3

Q．複素平面上では，反転は$w=k/\bar{z}$で表わされるのでしたね．そして，一般に正則関数$f(z)$による写像$w=f(z)$では，$f'(z)\neq 0$である限り等角写像になることを習いました．

A．よく覚えていました．ところがこれは2次元での話で，3次元以上になると全く限られてしまうのです．

証明．n次元ユークリッド空間で，直角座標を考え，点xから点Xへの写像

$$\varphi:(x_1, \cdots, x_n) \longrightarrow (X_1, \cdots, X_n)$$

が等角写像であったとしよう．このとき，$X_i=\varphi_i(x)$とおくと，

$$dX_i=\sum_{j=1}^{n} t_{ij}dx_j \quad ここに\ t_{ij}=\frac{\partial X_i}{\partial x_j} \tag{33}$$

で，点xで考えた単位直交系

$$e_1=(1,0,\cdots,0),\ e_2=(0,1,0,\cdots,0),\ \cdots,\ e_n(0,\cdots,0,1)$$

はそれぞれ点Xでのベクトル

$$(t_{11},t_{21},\cdots,t_{n1}),\ (t_{12},t_{22},\cdots,t_{n2}),\ \cdots,\ (t_{1n},t_{2n},\cdots,t_{nn})$$

へ移る．φは等角写像であるから，これらは直交している．したがって，単位直交系$E_1, E_2, \cdots, E_n$を使って，

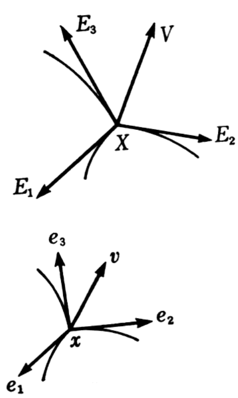


図4

$$\lambda_1E_1,\ \lambda_2E_2,\ \cdots,\ \lambda_nE_n$$

と表わすことができる．そこで，点 x でのベクトル　$v=\sum_{i=1}^{n} v_i e_i$　を考えると，これは写像 φ によって点 X でのベクトル　$V=\sum_{i=1}^{n} v_i\lambda_i E_i$　へ移る．v が e_i とつくる角と V が E_i とつくる角とは等しいから，それらの余弦を考えると，次の等式が成り立つ．

$$v_i\Big(\sum_j v_j^2\Big)^{-\frac{1}{2}}=\lambda_i v_i\Big(\sum_j \lambda_j^2 v_j^2\Big)^{-\frac{1}{2}}$$

$v_i\neq 0$ として，$$\sum_j \lambda_j^2 v_j^2=\lambda_i^2\sum_j v_j^2$$

v は任意のベクトルだから，結局 $\lambda_1^2=\lambda_2^2=\cdots=\lambda_n^2$ となる．これを λ^2 とおくと，$E_1, E_2, \cdots, E_n$ が単位直交系であることから，

$$\sum_{k=1}^{n} t_{ki}t_{kj}=\lambda^2\delta_{ij}$$

となって，(33)から，$$\sum_i (dX_i)^2=\lambda^2\sum_i (dx_i)^2 \tag{34}$$

つまり，φ が等角写像であることから，この式が導かれたわけである．

そこで，$\omega_i=\lambda dx_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ とおいて，

$$d\omega_i=\sum_j \omega_j\wedge\omega_{ji},\qquad \omega_{ij}=-\omega_{ji}$$

となる ω_{ij} を求める．このはじめの式は，

$$d\lambda\wedge dx_i=\sum_j \lambda dx_j\wedge\omega_{ji},\quad \text{したがって，}\quad \frac{d\lambda}{\lambda}\wedge dx_i=\sum_j dx_j\wedge\omega_{ji}$$

とかけるから，

$$\frac{d\lambda}{\lambda}=\sum_i l_i dx_i \tag{35}$$

とおくと，ω_{ji} は次のようになる．

$$\omega_{ji}=l_j dx_i-l_i dx_j$$

そこで，曲率の微分形式 Ω_{ij} を求めると，

$$\begin{aligned}\Omega_{ij}&=d\omega_{ij}-\sum_k \omega_{ik}\wedge\omega_{kj}\\&=d(l_i dx_j-l_j dx_i)-\sum_k (l_i dx_k-l_k dx_i)\wedge(l_k dx_j-l_j dx_k)\\&=dl_i\wedge dx_j-dl_j\wedge dx_i-\sum_k (l_i l_k dx_k\wedge dx_j-l_j l_k dx_k\wedge dx_i\\&\quad -l_k^2 dx_i\wedge dx_j)\end{aligned}$$

いま，一般に，

$$dl_i=\sum_k l_{ik}dx_k,\ l^2=\sum_k l_k^2,\ m_{ik}=l_{ik}-l_i l_k+\frac{1}{2}\delta_{ik}l^2 \tag{36}$$

δ_{ik} は $i\neq k$ のとき 0
$i=k$ のとき 1

とおくと，$$\Omega_{ij}=\sum_k m_{ik}dx_k\wedge dx_j-\sum_k m_{jk}dx_k\wedge dx_i$$

(34)によると $\sum_i \omega_i^2$ はユークリッド空間の計量で，したがってその曲率の微分形式 Ω_{ij} は 0 である．だから $dx_i\wedge dx_k$ $(k\neq i, j)$ の係数を考えて，$m_{ik}=0$，

ここで $n\geqq 3$ が要る．

また，$dx_i\wedge dx_j$ の係数を考えて，

$$m_{ii}+m_{jj}=0$$

$i, j=1, \cdots, n\ (n\geqq 3)$ でこれが成り立つから $m_{ii}=0$ となって，結局　$m_{ij}=0$
したがって，(35), (36)によって，

$$dl_i=\sum_k\left(l_il_k-\frac{1}{2}\delta_{ik}l^2\right)dx_k=l_i\lambda^{-1}d\lambda-\frac{1}{2}l^2dx_i$$

これから，　$-2d(\lambda^{-1}l_i)=\lambda^{-1}l^2dx_i$　(37)

一般に fdx_i が全微分であれば，f は x_i だけの関数となる．

したがって $\lambda^{-1}l^2$ は x_i だけの関数である．そこで，$i=1, 2, \cdots, n$ として考えると，$\lambda^{-1}l^2$ は定数となる．これを $4c$ とおくと，

$$l^2=4c\lambda \tag{38}$$

(37)から，$-\lambda^{-1}l_i=2c(x_i-x_i^{(0)})$ ($x_i^{(0)}$ は定数)．そこで，$x_i-x_i^{(0)}$ を改めて x_i とおくと，

$$-l_i=2c\lambda x_i$$

$l^2=\sum l_i^2$ だから(38)から，　$4c^2\lambda^2\sum x_i^2=4c\lambda,\quad \lambda=(c\sum x_i^2)^{-1}$

以下 $\sum_i=\sum_{i=1}^n$ で i を省略する．

したがって，$r=(\sum x_i^2)^{\frac{1}{2}}$ とおくと(34)から，　$\sum(dX_i)^2=(cr^2)^{-2}\sum(dx_i)^2$

いま，$z_i=(cr^2)^{-1}x_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ による写像 $(x_1, \cdots, x_n)\to(z_1, \cdots, z_n)$ は反転で，

$$\sum(dz_i)^2=(cr^2)^{-2}\sum(dx_i)^2$$

となって，　$\sum(dX_i)^2=\sum(dz_i)^2$

したがって，$(z_1, \cdots, z_n)\to(X_1, \cdots, X_n)$ は長さを変えない変換で，これは移動(合同変換)である．

Q．計算は長いのですが，道筋ははっきりしていますね．要するに(34)と，ユークリッド空間をリーマン空間と考えたときは曲率が 0 ということですね．

A．その通りです．

練　習　問　題

1.　a_1, a_2, a_3 が x_1, x_2, x_3 の関数で $\omega=a_1dx_1+a_2dx_2+a_3dx_3$ のとき，$\omega=0$ が完全積分可能となるための条件は，

$$a_1\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_3}-\frac{\partial a_3}{\partial x_2}\right)+a_2\left(\frac{\partial a_3}{\partial x_1}-\frac{\partial a_1}{\partial x_3}\right)+a_3\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_2}-\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\right)=0$$

であることを示せ．

2.　$ds^2=\sum_i\omega_i^2$ で曲率の微分形式が $\Omega_{ij}=-K\omega_i\wedge\omega_j$ (K は定数)のとき，このリーマン空間は定曲率であるという．n 次元の定曲率リーマン空間で $K=a^{-2}$ $(a>0)$ のとき，これは $n+1$ 次元のユークリッド空間の半径 a の超球面の上のリーマン計量となることを示せ．

ヒント 2.　$dA=\sum_i\omega_ie_i,\ de_i=\sum_j\omega_{ij}e_j-a^{-2}\omega_iA$ が完全積分可能であることを示せ．これによって $a^{-1}A, e_1, \cdots, e_n$ が単位直交系にとれる．

第13章　等質空間

これまでに，ユークリッド平面や空間での移動や，その中で点，直線，平面のそれぞれを基本として考えた場合の等質空間を，動座標系の方法で扱うことを述べてきているが，今回はこうしたことを，有限個のパラメーターをもったもっと一般の連続群（リー群）と，これをもとにした等質空間について解説する．ここでも，微分形式の運用が基本となるが，前回述べたフロベニウスの定理は，等質空間の考察には欠かすことができない．

等質空間
homogeneous space

リー群
Lie group

1. 等質空間

これについては，前に述べたが，もう一度はじめから復習していく．

群 G と，その部分群 H があるとき，G の任意の2つの元の間の関係～を，

$$x \sim y \rightleftarrows y=hx \quad \text{となる} \quad h \in H \quad \text{が存在する}$$

によって定義すると，同値律

$$x \sim x$$
$$x \sim y \quad \text{ならば，} \quad y \sim x$$
$$x \sim y,\ y \sim z \quad \text{ならば，} \quad x \sim z$$

が成り立つ．したがって，G はこの関係で同値類に分類され，各類は，

$$Ha=\{ha \mid h \in H\}$$

の形の集合となる．これが H による左剰余類である．

いま，これらの剰余類の全体(剰余系)を $M=G/H$ で表わし，G の任意の元 x の M の上への働らきを，

$$Ha \longrightarrow (Ha)x=H(ax)$$

によって定義するとき，これは M のそれ自身の上への1対1の写像になっていて，この写像(変換)の全体は群をなしている．つまり G は M の上の変換群と考えられる．この場合，M の任意の元 Ha をもう1つの任意の元 Hb へ移す G の変換は必ず存在する．$a^{-1}b$ はその1つである．

このように考えたとき，$M=G/H$ を G を基本の変換群にもつ等質空間という．とくに，H が G の単位元だけからできている群の場合には，$M=G$ となり，G は G 自身の上へ変換群として働くことになる．このときの $M=G$ を群空間という．

Q． ここでのお話はすべて証明ぬきですね．大体知っていることですが．

A． もちろん，そうです．そこまでお話ししていては，とても追いつきません．

Q． 前に，こうしたことが動座標系の方法の基本であることを伺いましたから，復習してみます．ユークリッド平面上で，表向きの移動の全体のつくる

群を G とします．このとき，1点 O のまわりの回転全体の群をHとしますと，1つの移動 a について，

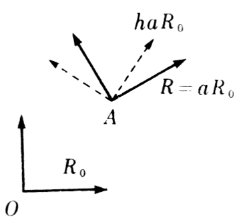


図1

$$Ha=\{ha \mid h \text{ は } O \text{ のまわりの回転}\}$$

となって，a が点 O を点 A へ移す移動であれば，Ha は点 O を点 A へ移す移動の全体となります．だから，Ha は点 A と同等と考えられます．したがって，$M=G/H$ はユークリッド平面の点全体からなる等質空間で，G はそれに働く移動群です．

この場合，群空間というのは，G 自身ですが，具体的には何になりますか．

A．基本の単位直交系(座標系)を R_0 としますと，任意の動座標系 R は，R_0 に G の変換 a を施こしたものと考えられ，しかも R_0 をきめておけば R と a は1対1に対応します．ですから，動座標系 R の全体が群空間そのものと考えられます．

Q．部分群 H をもっとちがったものにとった場合も考えたように思いますが．

A．そうです．それは，一定の方向の平行移動の全体を H にしますと，

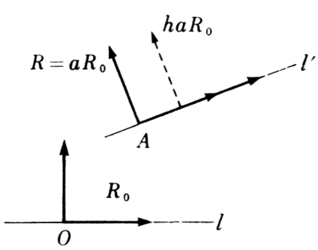


図2

$$Ha=\{ha \mid h \text{ は一定方向の平行移動}\}$$

となります．この一定方向を l とし，a が点 O を点 A へ移し，方向 l を方向 l' へ移すものとしますと，ha は O を通る方向 l の直線を点 A を通る方向 l' の直線へ移す移動の全体となります．したがって Ha は A を通る方向 l' の直線と同等と考えられ，$M=G/H$ は向きを考えた直線全体の作る等質空間ということになります．

これまでは，群 G の中に部分群 H が与えられているとして等質空間 $M=G/H$ を考えたが，G と M が初めに与えられていても同じことに帰着する．それは次のようである．

集合 M と，M をそれ自身の上へ1対1に移す変換の集合 G があって，G は群になっているとし，

M の任意の元を任意の元へ移す G の変換がある

とする．このとき，M の1つの元 O をそれ自身へ移す G の変換の全体を H とすると，H は G の部分群になっている．いま，M で元 O を任意の元 A へ移す変換の1つを a とすると，O を A へ移す変換の全体は Ha になっている．そこで，A と Ha とは1対1に対応することになり，しかも G がそれらの上に働くようすも対応しているから，M と G/H とは同じものと考えてよいわけである．


リー (1842〜1899)

2. 有限次元のリー群

G が群であって，しかも r 次元の微分多様体になっている場合を考える．いま，G の単位元を e とし，その近傍 U を適当にとると，G は r 次元の微分多様体であるから，U の中では各元 a に対して局所座標 $(a_1, a_2, \cdots, a_r)$ が考えら

れる．とくに単位元 e の局所座標は $(0, 0, \cdots, 0)$ としておく．

そこで，U の2つの元 a, b について，ab, a^{-1} も U 内にある場合を考えて，$a, b, c=ab, \alpha=a^{-1}$ の局所座標を，それぞれ，

$$(a_1, a_2, \cdots, a_r), \quad (b_1, b_2, \cdots, b_r), \quad (c_1, c_2, \cdots, c_r), \quad (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)$$

とおくと，

$$\begin{aligned} c_p &= f_p(a, b) = f_p(a_1, a_2, \cdots, a_r\,;\ b_1, b_2, \cdots, b_r) \\ \alpha_p &= g_p(a) = g_p(a_1, a_2, \cdots, a_r) \end{aligned} \qquad (p=1, 2, \cdots, r)$$

となっているわけである．ここでは，これらの関数はすべて C^∞ 級であるとしておく．このとき，G を r 次元のリー群という．

リー群 Lie group
C^∞ 級という条件は，もっと弱い条件でおきかえることができる．

いま，$a^{-1}=\alpha$，また $a=(a_1, a_2, \cdots, a_r)$ に近い元を $a'=(a_1+\Delta a_1, a_2+\Delta a_2, \cdots, a_r+\Delta a_r)$ とし，$\varepsilon=a'\alpha=a'a^{-1}$ を考えると，$\varepsilon=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r)$ について，

$$\varepsilon_p = f_p(a', \alpha) = f_p(a_1+\Delta a_1, \cdots, a_r+\Delta a_r\,;\ \alpha_1, \cdots, \alpha_r)$$

これを $\Delta a_1, \cdots, \Delta a_r$ について展開すると，$a\alpha=e$ によって

$$f_p(a, \alpha) = f_p(a_1, \cdots, a_n\,;\ \alpha_1, \cdots, \alpha_n) = 0$$

となることから，次のようになる．

$$\varepsilon_p = \sum_{q=1}^{r} \frac{\partial f_p}{\partial a_q}(a, \alpha)\Delta a_q + (\Delta a_1, \cdots, \Delta a_r \text{ について2次以上の項})$$

$\frac{\partial f_p}{\partial a_q}(a, \alpha)$ は，$f_p(a, b)$ を a_q で偏微分し，$b=\alpha$ とおいたものである．

そこで $\Delta a_1, \cdots, \Delta a_r$ について1次の部分をとって，

$$\omega_p = \omega_p(a, da) = \sum_{q=1}^{r} \frac{\partial f_p}{\partial a_q}(a, \alpha)\, da_q \qquad (p=1, 2, \cdots, r)$$

とおいて，これを群 G の相対成分という．

相対成分
relative component

これまでは，a が単位元 e の近傍 U にある場合について考えたが，そうでない場合にも相対成分は考えられる．それは，a とそれに近い元 a' については，$a'a^{-1}$ は e の近傍に入ってくるからである．

こうして定めた相対成分 ω_p は，次の諸性質をもっている．

(I) 相対成分 $\omega_p(a, da)$ は，$b=at$ (t は一定の元) による変換 $a\to b$ に対して不変である．すなわち，

$$\omega_p(b, db) = \omega_p(a, da)$$

証明．$b=at, b'=a't$ によって，

$$b'b^{-1} = (a't)(at)^{-1} = a'tt^{-1}a^{-1} = a'a^{-1}$$

$a=(a_1, \cdots, a_r)$，$a'=(a_1+\Delta a_1, \cdots, a_r+\Delta a_r)$ に対し，
$b=(b_1, \cdots, b_r)$，$b'=(b_1+\Delta b_1, \cdots, b_r+\Delta b_r)$ であるとすると，
$b'b^{-1}=a'a^{-1}$ の局所座標で $\Delta a_p, \Delta b_p$ について1次の部分を考えることによって，$\omega_p(b, db)=\omega_p(a, da)$．

(II) $\omega_p(a, da)$ $(p=1, \cdots, r)$ は1次独立な微分形式である．

証明．(I) によって，$a=e$ の場合に証明すればよいわけである．

$ae=a$ だから，　$f_p(a, e) = f_p(a_1, \cdots, a_n\,;\ 0, \cdots, 0) = a_p$

したがって，　$\dfrac{\partial f_p}{\partial a_q}(a,e) = \delta_{pq}$，　とくに　$\dfrac{\partial f_p}{\partial a_q}(e, e) = \delta_{pq}$

だから，e の近傍 U で $\det\left(\dfrac{\partial f_p}{\partial a_q}\right) \neq 0$ となり，$\omega_p(a, da)$ $(p=1, 2, \cdots, r)$ は1次独立である．

(Ⅲ) (Ⅰ)の変換 $a\to b=at$ で不変な a の1次微分式は,

$$\sum_{p=1}^{r} c_p\omega_p(a, da) \quad (c_1, \cdots, c_r \text{ は定数}) \text{ に限る.}$$

証明. $a\to b$ で不変な1次微分式を $\pi(a, da)$ とする. (Ⅱ)によって, これは,

$$\pi(a, da)=\sum_{p=1}^{r} c_p(a)\omega_p(a, da)$$

とおくことができる. この $c_p(a)$ が定数であることを示せばよい. いま,

$$\pi(b, db)=\sum_{p=1}^{r} c_p(b)\omega_p(b, db)$$

であるが, $a\to b$ に対して, $\pi(b, db)=\pi(a, da)$, $\omega_p(b, db)=\omega_p(a, da)$ だから, 結局,

$$\sum_{p=1}^{r} (c_p(a)-c_p(b))\omega_p(a,da)=0$$

(Ⅱ)によって, $\qquad c_p(a)=c_p(b)$

a を定めて考え, t を適当にとると b は任意の元になるから, $c_p(b)$ は定数である.

この $\pi(a, da)$ をも G の相対成分という.

(Ⅳ) $\omega_s=\omega_s(a, da)$ $(s=1, 2, \cdots, r)$ の外微分については,

$$d\omega_s=\sum_{p<q} c_{pqs}\omega_p\wedge\omega_q \qquad (c_{pqs} \text{ は定数})$$

右辺の和は, $p<q$ である $p=1, 2, \cdots, r$; $q=1, 2, \cdots, r$ の全体について作ったものを示す.

証明. $d\omega_s=\sum_{p<q} l_{pq}(a)da_p\wedge da_q$ の形で, $\omega_p=\omega_p(a, da)$ は1次独立だから, $da_1, \cdots, da_r$ を $\omega_1, \cdots, \omega_r$ で表わして,

$$d\omega_s=\sum_{p<q} c_{pqs}(a)\omega_p\wedge\omega_q \tag{1}$$

とおける. そこで, (Ⅲ)と同じように $a\to b$ という変換を考えると, (Ⅲ)によって $\omega_p=\omega_p(a, da)$ は不変, したがって $d\omega_p$ も不変だから,

$$c_{pqs}(b)=c_{pqs}(a)$$

となり, これは定数になる.

上の式(1)は, 次のようにも表わせる.

$$d\omega_s=\frac{1}{2}\sum_{p,q} c_{pqs}\omega_p\wedge\omega_q \qquad (c_{pqs}=-c_{qps})$$

この関係式をリー群 G の構造方程式という.

Q. いろいろのことが一挙に出てきましたね. 実例をお話しして下さい.

A. それにはやはり1次変換群のことになりますね.

$$x_i'=\sum_{j=1}^{n} p_{ji}x_j \qquad (i=1, \cdots, n)$$

で $\det(p_{ij})\neq 0$ であるものの全体は一般線形群 $GL(n)$ といわれますが, これは n^2 次元のリー群です. これを, $1\times n$ 行列

$$X'=(x_1' \cdots x_n'), \qquad X=(x_1 \cdots x_n)$$

と $n\times n$ 行列 $P=(p_{ij})$ を使って,

$$X' = XP$$

で表わし，これに $X'' = X'Q$ という変換を重ねますと，

$$X'' = X(PQ)$$

となります．そこで，P に近い変換 $P + \varDelta P$ と P^{-1} について，

$$(P + \varDelta P)P^{-1} = E + \varDelta PP^{-1}$$

をつくると，$\varDelta P$ については2次以上の項はないので，これは $E + dPP^{-1}$ とも書けるわけです．dPP^{-1} の成分を ω_{ij} $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ とすると，この n^2 個の ω_{ij} が一般線形群 $GL(n)$ の相対成分で，構造方程式は，

$$d\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}$$

となるのです．

Q．P が直交行列のときは，$\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ となるのでしたね．

A．そうです．このときは，$\omega_{ij}(i<j)$ が相対成分で，これは全部で $\frac{1}{2}n(n-1)$ 個です．n 次元の回転群は $\frac{1}{2}n(n-1)$ 次元のリー群です．

3. 等質空間と主相対成分

G が r 次元のリー群で，H がその中で $r-n$ 次元の部分多様体になっているような場合を考えることにする．H の上で相対成分 $\omega_p = \omega_p(a, da)$ を考えると，これは H の局所座標 $(u_1, \cdots, u_{r-n})$ を使って，

$$\omega_p = \sum_{t=1}^{r-n} m_{pt}(u) du_t$$

のように書けて，これらの中に，1次独立なものは $r-n$ 個あるわけである．いま，単位元 e のところ $(u=0)$ で考えると，

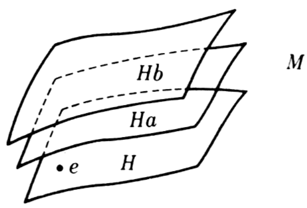


図3

$$\pi_i = \sum_{p=1}^{r} c_{ip}\omega_p = 0 \qquad (c_{ip} \text{ は定数})$$

となる1次独立な相対成分 π_i が n 個ある．

ところが，H の任意の元 h によって，

$$x \longrightarrow x' = xh$$

という変換を行なうと，H はそれ自身へ移り，しかも ω_p はこれで変わらないから，

$$\pi_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \text{ は } H \text{ の上では } 0$$

といえる．したがって，これはまた，定まった a について Ha の上で0である．

つまり，この

$$\pi_i = \sum_{p} c_{ip}\omega_p \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

は各剰余類 Ha の上では0であって，$M = G/H$ を考えれば，その各点に対して0といえる．この n 個の π_i を $M = G/H$ の主相対成分という．

主相対成分
主…principal

G で相対成分の全体を考えると，$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_r$ はその基底と考えられる．そこで，$\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n$ を新しい基底の一部にとって $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ とし，あと $\omega_{n+1}, \cdots, \omega_r$ をとって全体の基底にして考える．このときの $\omega_{n+1}, \cdots, \omega_r$ を副相対成分という．

副相対成分
副…secondary

こうしたことから，微分方程式系

$$\omega_i=0 \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

には Ha という解があって，これは空間を埋めているから，完全積分可能である．したがって，フロベニウスの定理によると，構造方程式

フロベニウスの定理

$$d\omega_i=\frac{1}{2}\sum_{p,q} c_{pqi}\omega_p\wedge\omega_q \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

の右辺には $\omega_\alpha\wedge\omega_\beta$ $(\alpha, \beta=n+1, \cdots, r)$ という項はふくまれない．したがって，

$$i, j, k=1, 2, \cdots, n \qquad \alpha=n+1, n+2, \cdots, r$$

というように添数の記号を使うことにすると，

$$d\omega_i=\frac{1}{2}\sum_{jk} c_{jki}\omega_j\wedge\omega_k+\sum_{\alpha j} c_{\alpha ji}\omega_\alpha\wedge\omega_j \qquad (i=1, \cdots, n) \tag{2}$$

となる．

Q．ここで，前回学んだフロベニウスの定理が出てきましたね．

A．そうです．ここで，ユークリッド平面の場合にあてはめてみましょう．

そこでは，

$$X'=(1, x_1', x_2'), \quad X=(1, x_1, x_2), \quad P=\begin{pmatrix} 1 & u_1 & u_2 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

とおくと移動が $X'=XP$ で与えられ，相対成分の行列は

$$dPP^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ 0 & 0 & \omega_{12} \\ 0 & -\omega_{12} & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

の形で，

$$\omega_1=du_1\cos\theta+du_2\sin\theta, \quad \omega_2=-du_1\sin\theta+du_2\cos\theta, \quad \omega_{12}=d\theta$$

H が原点のまわりの回転群のときは，H に属する変換 P では $u_1=0, u_2=0$ で $\omega_1=0, \omega_2=0$ となる．したがって，点を要素とする等質空間 $M=G/H$ での主相対成分は ω_1, ω_2 で，

$$d\omega_1=\omega_2\wedge\omega_{12}, \qquad d\omega_2=-\omega_1\wedge\omega_{12}$$

となっています．これが上の (2) に当る式です．

次に，H が第 1 軸の方向への平行移動の群とすると，H に属する変換 P では $u_2=0, \theta=0$ で，$\omega_2=0, \omega_{12}=0$ となる．したがって，直線を要素とする等質空間での主相対成分は ω_2, ω_{12} で，

$$d\omega_2=\omega_1\wedge\omega_{12}, \qquad d\omega_{12}=0$$

が (2) に当るのです．

4. 1次随伴群

1次随伴群
linear adjoint group

群空間 G で，G の元 t による変換 $a\to b=at$ によって相対成分 ω_p の変わらないことは前に述べたところであるが，次に，

$$a \longrightarrow \bar{a}=ta$$

という変換によってどうなるかをしらべてみよう．

a に近い a' を考えると，$a'\to ta'$ となり，$\varepsilon=a'a^{-1}$ に当るものは

$$\bar{\varepsilon}=\bar{a}'\bar{a}^{-1}=(ta')(ta)^{-1}=t(a'a^{-1})t^{-1}=t\varepsilon t^{-1}$$

となる．この場合，単位元 e の近傍 U において $\varepsilon=a'a^{-1}$ の局所座標を $(\varepsilon_1, \varepsilon_2,$

$\cdots, \varepsilon_r)$, t も U 内にとってその局所座標を $(t_1, t_2, \cdots, t_r)$ とし，$\bar{\varepsilon}=t\varepsilon t^{-1}$ の局所座標 $(\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \cdots, \bar{\varepsilon}_r)$ を求めてみよう．

まず，$t\varepsilon$ の局所座標 $(f_1(t, \varepsilon), \cdots, f_r(t, \varepsilon))$ を $\varepsilon=(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r)$ について展開する．$f_q(t, e)=t_q$ であることを使うと，

$$f_q(t, \varepsilon)=t_q+\sum_{s=1}^{r}\frac{\partial f_q}{\partial b_s}(t, e)\varepsilon_s+O(\varepsilon^2) \qquad (q=1, 2, \cdots, r)$$

$\frac{\partial f_q}{\partial b_s}(t, e)$ は，$f_q(a, b)$ について，$\frac{\partial f_q}{\partial b_s}(t, e)$ としたもの．

$t^{-1}=\tau$ とし，この $f_q(t, \varepsilon)$ を $f_p(f(t, \varepsilon), \tau)$ へ代入して $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r$ について展開すると，$f(t, \tau)=e$ であることを使って，

$$f_p(f(t, \varepsilon), \tau)=\sum_{qs}\frac{\partial f_p}{\partial a_q}(t, \tau)\frac{\partial f_q}{\partial b_s}(t, e)\varepsilon_s+O(\varepsilon^2) \tag{4}$$

a, a' の局所座標を，それぞれ $(a_1, \cdots, a_r)$, $(a_1+\Delta a_1, \cdots, a_r+\Delta a_r)$ とし，$\varepsilon=a'a^{-1}$ の局所座標 ε_p において $\Delta a_1, \cdots, \Delta a_r$ について1次の部分をとって作ったのが $\omega_p=\omega_p(a, da)$ である．同じように，$\bar{\varepsilon}=\bar{a}'\bar{a}^{-1}$ の局所座標 $\bar{\varepsilon}_p$ から同じ考えで作った1次微分式を $\bar{\omega}_p=\omega_p(\bar{a}, d\bar{a})$ とおくと，ω_p と $\bar{\omega}_p$ の関係が (4) により，

$$\bar{\omega}_p=\sum_{s=1}^{r}\tau_{ps}(t)\omega_s \tag{5}$$

によって与えられることになる．ここで

$$\tau_{ps}(t)=\sum_{q}\frac{\partial f_p}{\partial a_q}(t, \tau)\frac{\partial f_q}{\partial b_s}(t, e)$$

である．

ここでは，t が e に近い場合を考えたが，単位元 e から連続的に到達できる t については (5) の関係はやはり成り立っていることが証明できる．こうした t に対応してきまる1次変換 (5) の全体は群をつくる．これを1次随伴群という．これが群をつくることは，次のことからわかる．

G の任意の元 t を1つきめて，G の元 ε を，

$$\bar{\varepsilon}=t\varepsilon t^{-1}$$

へ変換する．この変換 $\varepsilon\to\bar{\varepsilon}$ の全体は群をつくっていることは，容易にわかる．この変換で，ε を G の単位元 e の近傍内にとって，ε の局所座標 $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r)$ について1次の部分だけとって考えたのが (5) である．

Q．ここへ入ってから大変話がわかりにくいのですが．

A．そうですね．ここは難しいところです．要するに，

G の元 t による変換 $a\to\bar{a}=ta$ によって，$\omega_p=\omega_p(a, da)$ は，

$$\omega_p(\bar{a}, d\bar{a})=\sum_{q=1}^{r}\tau_{pq}(t)\omega_q(a, da)$$

と変換される

ということです．

ここでは，相対成分 $\omega_1, \cdots, \omega_r$ は局所座標 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r$ に対応するものを考えてきたが，これらの定数係数の1次結合もそうした不変性をもっていて，やはり相対成分と呼ばれることは，前に述べたところである．そこで，このような相対成分で，1次独立なものを r 個とって，これらを改めて $\omega_1, \cdots, \omega_r$ としても，変換 $a\to\bar{a}=ta$ によって (5) のように変換されることに変わりはない．要するに基底のとり方を変えているにすぎない．

1次随伴群による変換は，線形群についていえば次のようである．

一般線形群 $GL(n)$ の元 P（つまり正則な $n\times n$ 行列）に対し，やはり正則な $n\times n$ 行列 T によって，

$$\bar{P}=TP$$

を対応させる．そうすると，T を一定にし，P を変化させるとき，

$$d\bar{P}\bar{P}^{-1}=d(TP)(TP)^{-1}=T(dPP^{-1})T^{-1} \tag{6}$$

そこで，各行列を成分で表わして，

$$d\bar{P}\bar{P}^{-1}=(\bar{\omega}_{ij}),\quad dPP^{-1}=(\omega_{ij}),\quad T=(t_{ij}),\quad T^{-1}=(\tau_{ij})$$

とおくと，

$$\bar{\omega}_{ij}=\sum_{kh} t_{ik}\tau_{hj}\omega_{kh} \tag{7}$$

となる．これが (5) に当る式である．

Q．(5) に当る式は，ユークリッド平面や空間で動座標系の方法を使っていろいろしらべたときに出てきましたね．もっとも，そこでは，T も一定ではなくて，$\bar{P}=TP$ のとき，

$$d\bar{P}\bar{P}^{-1}=T(dPP^{-1})T^{-1}+dTT^{-1}$$

という形でしたが．

A．そうです．よく覚えていましたね．これで T 一定とすると (6) になるのです．

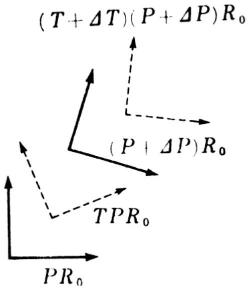


図4

次に等質空間 $M=G/H$ について考えてみよう．

ここで，$\omega_1, \cdots, \omega_n$ を主相対成分，$\omega_{n+1}, \cdots, \omega_r$ を副相対成分として，添数を

$$i, j=1, 2, \cdots, n \qquad \alpha=n+1, \cdots, r$$

のような記号で表わすとする．

いま，H の元 t による $a\to\bar{a}=ta$ を考えると，G/H の元 Hx の中で，hx とこれに近い $h'x$ について，

$$hx \longrightarrow thx, \qquad h'x \longrightarrow th'x$$

となり，

$$(h'x)(hx)^{-1}=h'h^{-1} \tag{8}$$

が

$$(th'x)(thx)^{-1}=(th')(th)^{-1} \tag{9}$$

へ変わる．t, h, h' はすべて H の元であるから，th', th ともに H の元で，h' が h に近いことから，th' も th に近い元になっている．

主相対成分 ω_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ は，H の上では 0 であるから，(8), (9) に対して 0 となる．したがって，変換 $a\to\bar{a}=ta$ に対応する変換

$$\bar{\omega}_i=\sum_{j=1}^{n}\tau_{ij}\omega_j+\sum_{\alpha=n+1}^{r}\tau_{i\alpha}\omega_\alpha$$

において，$\omega_i=0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ には $\bar{\omega}_i=0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ が対応することになり，$\tau_{i\alpha}=0$ となる．したがって，

$$\bar{\omega}_i=\sum_{j=1}^{n}\tau_{ij}\omega_j \qquad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{10}$$

これは要するに，

$M=G/H$ では，H の元 t による変換 $a \to \bar{a}=ta$ によって，主相対成分は1次変換をうける

ということである．

Q．ユークリッド平面で考えてみます．Hを原点のまわりの回転の群としますと，G/H が点を元とする等質空間で，その主相対成分は (3) での ω_1, ω_2 でした．そこで，H の元は，

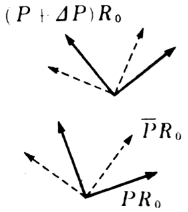


図5

$$T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

で，$\bar{P}=TP$ とおくとき，T による1次随伴変換は，

$$d\bar{P}\bar{P}^{-1}=T(dPP^{-1})T^{-1}$$

これから，

$$\bar{\omega}_1=\omega_1\cos\alpha+\omega_2\sin\alpha, \qquad \bar{\omega}_2=-\omega_1\sin\alpha+\omega_2\cos\alpha \tag{11}$$

となります．これが (10) に当る式ですね．

ところで，前に出てきたのは，T も変化する場合で，そのときは，

$$d\bar{P}\bar{P}^{-1}=T(dPP^{-1})T^{-1}+dTT^{-1}$$

というのでした．一般論のときも同じように行くのですか．

A．それが大事な点です．それは次のようです．

一般に，群 G で，単位元 e に近い2つの元を a, b とし，それらの局所座標を，それぞれ，$(a_1, \cdots, a_r)$，$(b_1, \cdots, b_r)$ とする．いま，

$$x'=xa, \qquad x''=x'b$$

とすると，

$$x''=x(ab).$$

これらの関係を局所座標で考えると，

$$x_p'=f_p(x,a), \qquad x''_p=f_p(x',b), \qquad x_p''=f_p(x,ab)$$

となる．これらを $a_1, \cdots, a_r$ および $b_1, \cdots, b_r$ について展開すると，$f_p(x,e)=x_p$ であることから，次のようになる．まず，

$$x_p'=x_p+\sum_q \frac{\partial f_p}{\partial b_q}(x,e)a_q+(a\ \text{について2次以上})$$

したがって，

$$x_p''=f_p(x',b)=x_p'+\sum_q \frac{\partial f_p}{\partial b_q}(x',e)b_q+(b\ \text{について2次以上})$$
$$=x_p+\sum_q \frac{\partial f_p}{\partial b_q}(x,e)(a_q+b_q)+(a,b\ \text{について2次以上})$$

つまり，ab の局所座標は2次以上を除くと，$(a_1+b_1, \cdots, a_r+b_r)$ となる．

そこで，$a \to \bar{a}=ta$ において，t も変化するとき，$\varepsilon=a'a^{-1}$ に対して，

$$\bar{\varepsilon}=(t'a')(ta)^{-1}=(t't^{-1})\cdot t(a'a^{-1})t^{-1}$$

$t't^{-1}$ の相対成分は，$\omega_p(t,dt)$ であることから，$\bar{\varepsilon}$, $t't^{-1}$, $\varepsilon=a'a^{-1}$ の成分を考えるとき，(5) と上の原理を使って次の結果が得られる．

$$\bar{\omega}_p=\omega_p(\bar{a}, d\bar{a})=\sum_q \tau_{pq}(t)\omega_q(a, da)+\omega_p(t, dt)$$

とくに，$M=G/H$ において $\omega_1, \cdots, \omega_n$ を主相対成分にとり，$t, t' \in H$ とすると，$\omega_i(t, dt)=0$ $(i=1, \cdots, n)$ であることから，

$$\bar{\omega}_i=\sum_j \tau_{ij}(t)\omega_j \tag{12}$$

となって (10) と同じ式が成り立つ．

Q．なるほど，$M=G/H$ では，主相対成分については t が一定でなくても同じなのですね．こうしたことの応用は何ですか．

A．それは次のようです．

$M=G/H$ で，$t\in H$ とすると (12) が成り立つわけであるが，ここで，

$$\varDelta=\det(\tau_{ij})$$

とおくと，

$$\bar{\omega}_1\wedge\cdots\wedge\bar{\omega}_n=\varDelta\cdot\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_n$$

したがって，$\varDelta=1$ のときは，

$$\bar{\omega}_1\wedge\cdots\wedge\bar{\omega}_n=\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_n \tag{13}$$

このことから，次のことがいえる．

定理　$M=G/H$ で $t\in H$ に対して $\varDelta=\det(\tau_{ij})=1$ であれば，M の部分集合 A に対し，

$$m(A)=\int_A \omega_1\wedge\omega_2\wedge\cdots\wedge\omega_n \tag{14}$$

は G の変換で不変な測度になっている．

証明．(13) によって，M の元 Hx を取扱うのに，hx としたときの h のとり方を変えても，$\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_n$ は変わらないことがわかる．したがって，$m(A)$ は A の測度と考えられる．

また，$a\to b=at$ という変換によって，相対成分 ω_p^* はすべて変わらないから，$m(A)$ は A にこの変換を施こしても変わらない．

Q．(11) でいうと，$\bar{\omega}_1\wedge\bar{\omega}_2=\omega_1\wedge\omega_2$ ですね．このことは前にやりました．$\int_A \omega_1\wedge\omega_2$ は A のふつうの面積でした．ところで，(14) のような微分形式と積分の関係は，まだ十分伺っていないと思いますが．

A．それは次回にお話しします．とにかく，今回の話は，これまでお話しした動座標系の方法の基礎を一般化したものですから，前のことをここの話に照し合わせて復習して下さい．これがここでの練習問題です．

なお，(τ_{ij}) が直交行列のときは，

$$\bar{\omega}_1^2+\bar{\omega}_2^2+\cdots+\bar{\omega}_n^2=\omega_1^2+\omega_2^2+\cdots+\omega_n^2$$

となる．これは M の上のリーマン計量で，G の変換で不変である．このとき，M を等質リーマン空間という．ユークリッド空間や球面はこのようなものの中で最も簡単なものである．

第14章 ストークスの定理とその応用

これまで，14回にわたって微分形式の基礎とその応用を述べてきたが，今回でこの話を終ろうと思う．この場合，どうしても欠かすことのできないのはストークスの定理である．これは，2次元の場合は，カウス·グリーンの公式，3次元の場合はガウスの公式として昔から知られていたもので，とくに電磁気学や流体力学などではよく使われている．ところが，今日ではこれは，数学の全般にわたっての基本定理で，トポロジーにおけるコホモロジーの理論の端緒となったのも，これである．この意味で，ストークスの定理は単に1つの定理というに止らず，思想ともいえるものであろう．本誌でも，ストークスの定理が，多くの人によって繰返し述べられているが，それはこの理由からである．ここでは，微分多様体の理論に基づくこの定理の証明と，1つの応用を示すことにする．

本誌 → 雑誌「現代数学」

1．微分多様体の上での積分

2次元や3次元での積分公式

$$\iint_D\left(\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial y}\right)dxdy=\int_c(adx+bdy) \qquad (c \text{ は } D \text{ の周})$$

$$\iiint_D\left(\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial y}+\frac{\partial c}{\partial z}\right)dxdydz$$

$$=\iint_S(adydz+bdzdx+cdxdy) \qquad (S \text{ は } D \text{ の表面})$$

においては，線積分や面積分が基本になっている．これに当るものを一般に考えようとすると，それは微分多様体の上での積分となる．そこでこの話から始めることにする．

M は n 次元の微分多様体とする．つまり，M は位相空間（ハウスドルフ空間）で，開集合の集まり $\{U_\alpha\}$ で被われていて，これが次の性質をもっている．

U_α を座標近傍という．

(i) 各 U_α から n 次元の空間 R^n（またはその開集合）の上への同相な写像 φ_α がある．このとき，U_α の点 p に対し，$\varphi_\alpha(p)=(x_1, \cdots, x_n)$ であれば，$(x_1, \cdots, x_n)$ を p の U_α 内での局所座標という．

(ii) $\{U_\alpha\}$ に属する2つの集合 U_α, U_β について，$U_\alpha \cap U_\beta$ が空集合でないとすると，その中の点 p については，U_α の中での局所座標 $(x_1, \cdots, x_n)$ と U_β の中での局所座標 $(y_1, \cdots, y_n)$ とが考えられるが，その間の関係として，

$$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}:\ (x_1, \cdots, x_n) \longrightarrow (y_1, \cdots, y_n)$$

$$\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}:\ (y_1, \cdots, y_n) \longrightarrow (x_1, \cdots, x_n)$$

はともに C^∞ 級である．

必然的に $\dfrac{\partial(y_1, \cdots, y_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)} \neq 0$

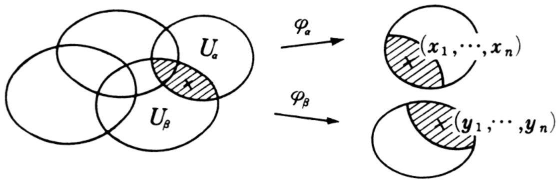


図 1

Q．そうしますと，ここで微分多様体といっているのは C^∞ 級の微分多様体のことですね．

A．そうです．それから，U_α 自身の中でも，(ii) で示した条件をみたす $(x_1, \cdots, x_n)$ から $(y_1, \cdots, y_n)$ への座標変換を自由に考えることにしておきます．

微分多様体 M で，各 U_α の中に局所座標が定められていて，$U_\alpha \cap U_\beta$ での座標の変換 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : (x_1, \cdots, x_n) \to (y_1, \cdots, y_n)$ について，

$$\frac{\partial(y_1, \cdots, y_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)} > 0 \tag{1}$$

となっているとき，M は向きがきまっている（方向づけられている）という．このとき，各局所座標について，たとえば

方向づけ orientation

$$x_1' = -x_1, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3, \quad \cdots\cdots, \quad x_n' = x_n$$

できまる $(x_1', x_2', \cdots, x_n')$ を新しい座標系にとると，M にははじめとちがった方向づけができる．

Q．2 次元の曲面では，球面は方向づけが出来るが，メビウスの帯ではこれができないことを知っています．こうしたことと関連があるのですか．

A．その話を一般のところへ持っていったことです．球面やメビウスの帯について，上のことを確かめておいて下さい．2 次元のときは，面の上のまわり向きというようなことで直観的にいえますが，3 次元以上になると，そうしたことではいえないのです．

向きのきまった n 次元の微分多様体 M（またはその部分集合）の上で定義された n 階の微分形式 ω があるとする．これは 1 つの近傍 U_α の上では，局所座標 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ によって，

$$\omega = a(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

で表わされる．このとき，U_α にふくまれる有界閉集合 A の上で，

$$\int_A \omega = \int \cdots \int_{\varphi_\alpha(A)} a(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \tag{2}$$

という積分を定義することができる．この場合，向きをかえない座標変換 $f : (x_1, \cdots, x_n) \to (y_1, \cdots, y_n)$ で，$x_1, \cdots, x_n$ を $y_1, \cdots, y_n$ で表わして $x_i = g_i(y) = g_i(y_1, \cdots, y_n)$ とすると，ω は

つまり，(1) の成り立つ座標変換

$$\omega = a(g_1(y), \cdots, g_n(y)) \frac{\partial(x_1, \cdots, x_n)}{\partial(y_1, \cdots, y_n)} dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$$

となるが，これから定まる

$$\int \cdots\cdots \int_{f \circ \varphi_\alpha(A)} a(g_1(y), \cdots, a_n(y)) \frac{\partial(x_1, \cdots, x_n)}{\partial(y_1, \cdots, y_n)} dy_1 \cdots dy_n$$

が (2) と同じ値をとることは，ふつうの微積分学の示すところである．

Q．結局 M の方向づけがきまっていると，n 階の微分形式 ω と座標近傍 U_α 内

の集合 A とで，A の上の ω の積分が定まり，これが向きを変えない座標変換について変わらないということですね．

A．そうです．もし，向きを変えれば，積分は符号が変わることになります．

Q．そこで，座標近傍だけでなく，もっと広い範囲での積分を考えるわけですか．

A．そうです．それには，準備が要ります．

これからは，微分多様体 M が可算個の基をもつとする．つまり，可算個の開集合からなる近傍系がとれるとする．また，集合 U_α の系 $\{U_\alpha\}$ があって，その合併が M になっているとき，$\{U_\alpha\}$ を M の被覆というのであるが，その中で，M の任意のコンパクトな集合が有限個の U_α とだけ交わるとき，この被覆は局所有限であるという．このとき，次のことが証明できる．

$\{U_\alpha\}$ が基というのは任意の開集合がいくつかの U_α の合併になっていることである．
可算個の基をもつことを可分という．

定理 1　K は M の開集合の集まりで，基になっているとする．このとき，K の一部分 (可算個) をとって，M の局所有限な開被覆を作ることができる．

証明．M は可算個の基をもっている．その中で座標近傍の中の有界な開集合を埋めるものだけとって $\{P_i\}$ とすると，P_i の閉包 $\bar{P}_i$ はコンパクトである．そこで，$Q_j=\bigcup_{1\leqq i\leqq j}\bar{P}_i$ $(j=1, 2, \cdots)$ とおくと Q_j はコンパクトで，$\{Q_j\}$ は M の被覆になっている．このとき，

座標近傍の中の有界な開集合とは，球 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqq a^2$ (a は任意の正数) にふくまれる集合

$$Q_j\subset R_j,\quad R_j\subset(R_{j+1}\text{ の内部})\qquad (j=1, 2, \cdots)$$

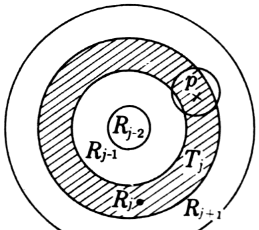
となるコンパクトな R_j の列が，次のようにして帰納的に定められる．

まず $R=Q_1$. 次に $R_1, \cdots, R_j$ が作られたとするとき，$R_j\cup Q_{j+1}$ はコンパクトだから，$\{P_i\}$ の有限個で被える，その被覆の閉包を R_{j+1} とする．

そこで，R_j の内部を S_j, $T_j=R_j\cap(M-S_{j-1})$ とすると，$R_{j-2}\subset S_{j-1}$, $T_j\subset M-S_{j-1}$ によって，$T_j\cap R_{j-2}=\phi$.

$M-S_{j-1}$ は，M の中での S_{j-1} の補集合

定理に与えられている基 K の集合で，T_j の点 p に対し，p をふくみ，S_{j+1} に入り，R_{j-2} と共通点をもたないものを考えると，その全体は T_j の被覆になっている．T_j はコンパクトな R_j の閉部分集合だから，やはりコンパクトで，上の被覆の中から有限個からなる被覆を作ることができる．これを K_j とし，K_j $(j=1, 2, \cdots)$ の全体を K' とすると，K' は M の局所有限な被覆になっていることは，次のようにしてわかる．



第 2 図

M の元 p について，$p\in R_k$, $p\notin R_{k-1}$ となる k があって，$p\in T_k$ さらに，$j\geqq k+2$ ならば，R_k は K_j の集合と交わらない．(証明終)

次に，少し話が変わって次のことを証明する．

定理 2　U は M の座標近傍，V は M の開集合でその閉包 $\bar{V}$ はコンパクトで U に入っているとする．このとき，C^∞ 級の関数 $h(p)$ で，

$$0\leqq h(p)\leqq 1,\quad p\in\bar{V}\ \text{では}\ h(p)=1,\quad p\in M-U\ \text{では}\ h(p)=0$$

となるものがある．

証明．まず，

$x>0$ では $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$, $x\leqq 0$ では $f(x)=0$

となるC^{∞} 級の関数 $f(x)$ を考え,

$$g(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)f(1-t)\,dt\Big/\int_{-\infty}^{\infty}f(t)f(1-t)\,dt$$

を作って, さらに,

$$h(x)=g(x+1)-g(x)$$

とおくと,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}h(x-j)=1$$

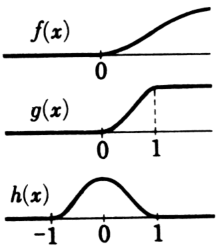


図3

この $f(x)$ が C^{∞} 級のことは, 数学的帰納法で $f^{(n)}(0)=0$ を示せばよい.

そこで, $J=(j_1,\cdots,j_n)$, $\varphi_J=h\left(\frac{x_1}{\varepsilon}-j_1\right)\cdots h\left(\frac{x_n}{\varepsilon}-j_n\right)$

とおくと, $\varphi_J\geqq 0$, すべての J についての和 $\sum\varphi_J=1$, かつ

立方体 $|x_i-j_i\varepsilon|\leqq\varepsilon$ $(i=1,2,\cdots,n)$ の外の点 $(x_1,\cdots,x_n)$ で $\varphi_J=0$ となる,

そこで, Mの座標近傍U内で, 十分小さい正数 ε に対しては $\bar{V}$ と交わる立方体は U に入っている. 台 (support) が $\bar{V}$ と共通点をもっ立方体である φ_J は有限個で, その和 φ を作る. U 内では φ, 外では0となる $h(p)$ が求めるものである. (証明終)

関数fの台とは, $f(x)\neq 0$ となる x の集合の閉包をいう.

定理1, 2によって, 次の定理が導かれる.

定理3 Mの開被覆を $\{U_i\}$ とするとき, 次の条件をみたす C^{∞} 級の関数 f_α の系 $\{f_\alpha\}$ が存在する.

(1) $0\leqq f_\alpha\leqq 1$, f_α の台はコンパクトで, ある U_i に入っている.

(2) M の各点は, f_α の台の有限個と交わる.

(3) $\sum_\alpha f_\alpha=1$

証明. 次の性質をもつ開集合 W の全体を考える.

(a) $\overline{W}$ はコンパクトで, ある U_i に入る.

(b) M の上の C^{∞} 級の関数 w $(0\leqq w\leqq 1)$ があって, $w\neq 0$ となる点の全体が W

このような W の全体が M の基になっていることが, 定理2によってわかる. 定理1によると, その中で可算個からなる局所有限な開被覆となるものが選べる. これを $\{W_\alpha\}$ とし, W_α に対応する関数を w_α とする. 局所有限ということから $\sum_\alpha w_\alpha(p)$ は各点 p について有限和となっていて, しかもこの和は0でない. そこで

$$f_\alpha(p)=\frac{w_\alpha(p)}{\sum_\alpha w_\alpha(p)}$$

とおけば, これが求めるものになっている. (証明終)

注. この証明からわかるように, $\{W_\alpha\}$ は局所有限で, f_α の台が $\overline{W}_\alpha$ である.

定理3の関数系 $\{f_\alpha\}$ を1の分割という. これは応用の広いものであって, 微分多様体の大局的な性質を局所的な性質からきめていくとき役に立つ. ここでも, これによって M の上の積分が定義できる. それは次のようである.

1の分割
partition of unity

定理4 Mは方向のつけられた可算個の基をもつn次元の微分多様体, ω は M の上で定義されていて台がコンパクトな n 階の微分形式とする. この

外微分式の台も関数の台と同じように定義される.

ような ω の集合 $\{\omega\}$ の各元に，次の性質をもつ実数 $\int\omega$ を対応させることができる．また，これは一意的である．

(1) $\{\omega\}$ の2つの元 ω_1, ω_2 に対して，$\int(\omega_1+\omega_2)=\int\omega_1+\int\omega_2$

(2) ω の台が方向づけに合う座標 $(x_1, \cdots, x_n)$ で表わされた近傍 U に入っているとし，

$$\omega=a(x_1, x_2, \cdots, x_n)dx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n$$

とするとき，$\int\omega$ は n 次元のリーマン積分

$$\int_U a(x_1, x_2, \cdots, x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

に等しい．

証明．M が座標近傍 U_β で覆われているとして， それに従属する1の分解を $\{f_\alpha\}$ とする．ω の台はコンパクトであるから，これを S とすると，f_α の台をふくみ座標近傍に入る開集合による開被覆を考えることによって，

S と共有点のある f_α の台は有限個である

ことがわかる．したがって，$1=\sum_\alpha f_\alpha$ によって，

$$\omega=\sum_\alpha f_\alpha\omega$$

ここで，右辺は有限和だから，定理の条件 (1) をみたす $\int\omega$ は，

$$\int\omega=\sum_\alpha\int f_\alpha\omega$$

となる．$f_\alpha\omega$ は1つの座標近傍の中にあるから，(2) で示したように $\int f_\alpha\omega$ はふつうのリーマン積分にとっておけばよい． こうして定めた $\int\omega$ については (1) (2) の成り立つことは明らかである．

次に，この $\int\omega$ が一意的に定まることは，次のように確かめられる．座標近傍系 $\{U_\beta\}$，それに従属する1の分割 $\{f_\alpha\}$ と， 座標近傍系 $\{U_\delta'\}$，それに従属する1の分割 $\{f_\gamma'\}$ があるとき，それを重ねた $\{U_\beta\cap U_\gamma'\}$ には1の分割 $\{f_\alpha f_\gamma'\}$ が対応する．そして，$\{U_\beta\}$, $\{f_\alpha\}$ に対して定義される

$$\int\omega=\int\sum_\alpha f_\alpha\omega=\sum_{\alpha\gamma}\int f_\alpha f_\gamma'\omega$$

と $\{U_\delta'\}$, $\{f_\gamma'\}$ に対して定義される

$$\int\omega=\int\sum f_\gamma'\omega=\sum_{\alpha\gamma}\int f_\alpha f_\gamma'\omega$$

とは同じものになる．

2. ストークスの定理

n 次元の微分多様体 M の中の部分集合 D が次の性質をもつとき，これを正則な境界をもつ領域であるという．

正則な境界
regular boundary

D は次の2種数の点からできている．

(A) 内点，つまりその点の近傍で D に属するものがある点

（B） 境界点，これはその点 p の近傍 U で座標 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を適当にとると，

$$U\cap D=\{q\,|\,q\in U,\ x_n(q)\geqq x_n(p)\}$$

となっている．境界点の集合 B を境界という．

（B）の場合，U 内で境界点は x_n が一定の値をとる点になっているわけである．

$x_n(p)$ は p の第 n 座標

境界上では x_n が一定となる．それは，境界の点 p, p' については

$x_n(p')\geqq x_n(p)$,

$x_n(p)\geqq x_n(p')$

となるからである．

例． n 次元のユークリッド空間内で，直角座標 $X_1, \cdots, X_n$ を考えると，原点を中心とする半径 a の球 D は，

$$X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2\leqq a^2 \tag{1}$$

で表わされるが，これが正則な境界をもった領域であることは，次のようにしてわかる．まず，

$$X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2<a^2 \tag{2}$$

である点 $(X_1, \cdots, X_n)$ は内点である．それは，この点を中心として $a-\sqrt{X_1^2+\cdots+X_n^2}$ より小さい半径で球を作ると，(1) にふくまれているからである．次に，

$$X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2=a^2$$

である点 $(X_1, \cdots, X_n)$ は境界点である．それは，たとえば $X_n\neq 0$ のところでいえば，その点の近傍では，

$$x_1=X_1,\ x_2=X_2,\ \cdots,\ x_{n-1}=X_{n-1},\ x_n=a-\sqrt{X_1^2+\cdots+X_n^2}$$

できまる $(x_1, \cdots, x_n)$ を局所座標にとると，球は局所的には $x_n\geqq 0$ で表わされる．

そこで，一般に次のことが証明される．

定理 5 方向づけられた微分多様体 M の中にある正則な境界をもった領域 D について，その境界は方向づけが可能である．

証明．D の境界 B の各点 p に対してその座標近傍 U で M の方向づけに合った座標系で (B) に合うものを考え $x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n$ とし，$U\cap B$ については $x_n=0$ とすると，$U\cap D$ については，

$$x_n\geqq 0 \tag{1}$$

同じように座標近傍 V について，M の方向づけに合った座標系で (2) に合うものを $y_1, \cdots, y_{n-1}, y_n$ とし，$V\cap B$ については $y_n=0$ とすると，$V\cap D$ について，

$$y_n\geqq 0 \tag{2}$$

そこで，M の方向づけによって $U\cap V$ の点に対しては，

$$\frac{\partial(y_1, \cdots, y_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)}>0 \tag{3}$$

また，$y_n=\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ については，$x_n=0, y_n=0$ が対応するから，

$$0=\varphi(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0)$$

それで，$U\cap V\cap B$ では，

$$\frac{\partial y_n}{\partial x_i}=0 \qquad (i=1, 2, \cdots, n-1)$$

したがって，(3) から，

$$\frac{\partial(y_1, \cdots, y_{n-1})}{\partial(x_1, \cdots, x_{n-1})}\frac{\partial y_n}{\partial x_n}>0 \tag{4}$$

この式からわかるように $\dfrac{\partial y_n}{\partial x_n}\neq 0$ であるが，(1) と (2) が対応することから $\dfrac{\partial y_n}{\partial x_n}\geqq 0$ だから，(4) から，

$$\frac{\partial(y_1, \cdots, y_{n-1})}{\partial(x_1, \cdots, x_{n-1})}>0$$

したがって，$U\cap B$ での座標系 $x_1, \cdots, x_{n-1}$, $V\cap B$ での座標系 $y_1, \cdots, y_{n-1}$ というように M での方向づけによる座標系から導かれる B での座標系は方向づけられている.（証明終）

以下，B での方向づけは，上のものでなく，$(-1)^n x_1, x_2, \cdots, x_n$ によるものであるとしておく，そうすれば，$U\cap B$ 内の領域 A での

$$\Omega=a(x_1, \cdots, x_{n-1})dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{n-1}$$

の積分については，

$$\int_A \Omega=(-1)^n\int_A a(x_1, \cdots, x_{n-1})dx_1\cdots dx_{n-1}$$

となる.

Q. このことは，たとえば2次元でいうとどうなりますか.

A. M をユークリッド平面，X_1, X_2 をその上の直角座標で，この順で M の方向づけが定まっているとします. M の領域 D についてこれが正則な境界 B をもつとすると B 上の点の近傍 U では，$U\cap B$ が $x_2=0$, $U\cap D$ が $x_2\geqq 0$ で表わされる局所座標 x_1, x_2 で X_1, X_2 による方向づけに合うもの，つまり

$$\frac{\partial(X_1, X_2)}{\partial(x_1, x_2)}>0$$

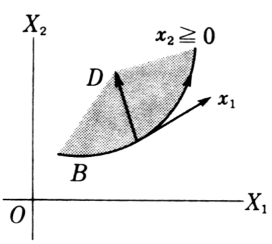


図4

であるものをとることによって，$U\cap B$ での方向づけは x_1 によってなされることになります.

Q. 3次元のときは，どうですか.

A. M が3次元のユークリッド空間のときは，直角座標 X_1, X_2, X_3 で方向づけがきまっているとき，正則な境界 B をもつ領域 D について，B の点の近傍 U では，$U\cap B$ が $x_3=0$, $U\cap D$ が $x_3\geqq 0$ で表わされる局所座標系で X_1, X_2, X_3 の方向づけと合うものをとると，$U\cap B$ 上での局所座標系で M の方向づけに合うものとしては，$-x_1, x_2$, したがって x_2, x_1 が方向づけをきめる座標系になります. このことは，図形的にいいますと，D の外側からみたとき x_2, x_1 によるまわり向きが正ということに当ります.

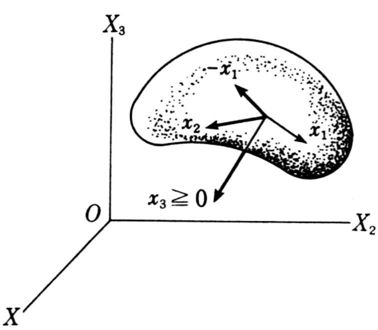


図5

これまでは，台がコンパクトである n 階の微分形式 ω についての M での積分

$\int \omega$ を考えてきたが，D がコンパクトで境界が正則な部分集合の場合に，$\int_D \omega$ を次のように定義する．

$h(p)$ は M の上の関数で，$p \in D$ のとき $h(p)=1$, $p \notin D$ のとき $h(p)=0$ であるとして，

$$\int_D \omega = \int h\omega$$

ここで，$h\omega$ は D の境界 B では連続と限らないが，上の式の右辺は前に考えた $\int \omega$ と同じように定義することができる．

以上の準備の下でストークスの定理は次のように述べられる．

定理 6　M が可算個の基をもつ方向づけられた n 次元の微分多様体，D はその中のコンパクトな集合で，境界 B は正則とする．ω が D を台にもつ $n-1$ 階の微分形式とすると，

$$\int_D d\omega = \int_B \omega.$$

ここで，B の上の方向づけは，前ページによる．

D の境界 B を，ふつう ∂D で表わす．それはこの公式に由来する．

証明．1 の分割 $\{f_\alpha\}$ によると，$1=\sum_\alpha f_\alpha$，また，D はコンパクトだから，定理 3 の注を参照すれば，D と交わる f_α の台は有限個である．したがって，

$$\int_D d\omega = \sum_\alpha \int_D d(f_\alpha \omega), \qquad \int_B \omega = \sum_\alpha \int_B f_\alpha \omega$$

となって，これはどちらも有限和である．そこで，

$$\int_D d(f_\alpha \omega) = \int_B f_\alpha \omega$$

を証明すればよい．f_α の台は $\{U_i\}$ のどれかの U_i に入っているから，$f_\alpha \omega$ を改めて ω とし，U_i での M の方向づけに合う局所座標を $x_1, \cdots, x_n$ として，

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} a_j dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

とおいて，

$$\int_D d\omega = \int_B \omega \tag{5}$$

を証明すればよい．それには，次の 2 つの場合がある．

（I）　$U_i \cap B = \phi$ の場合．

このときは，$\int_B \omega = 0$. 他方 $\int_D d\omega$ については，U_i が D の中にあるから，

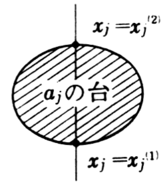


図6

$$\int_D d\omega = \sum_{j=1}^{n} \int_{U_j} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int [a_j]_{x_j = x_j^{(1)}}^{x_j = x_j^{(2)}} dx_1 \cdots dx_{j-1} dx_j \cdots dx_n \tag{6}$$

a_j の台は U_i 内にあるから，$x_j = x_j^{(1)}$, $x_j = x_j^{(2)}$ では 0 となって，

$$\int_D d\omega = 0$$

これで，（I）の場合に (5) が証明されたことになる．

(II) $U_i \cap B \neq 0$ の場合.

このときは，$U_i \cap B$ が $x_n=0$, $U_i \cap D$ の点に対しては $x_n \geqq 0$ となる座標系 $x_1, \cdots, x_n$ について考える．このとき，$k=1, 2, \cdots, n-1$ に対しては (6) と同じように，

$$\int_{U_i} \frac{\partial a_k}{\partial x_k} dx_1 dx_2 \cdots dx_n = 0$$

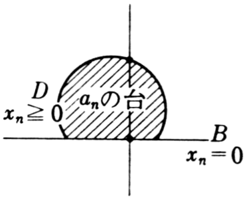


図7

また，

$$\int_{U_i} \frac{\partial a_n}{\partial x_n} dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

$$= \int_{U_i \cap B} -a_n(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0) dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1}$$

他方，$U_i \cap B$ の上では，

$$\omega = (-1)^{n-1} a_n dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}$$

ここでは，方向づけは $(-1)^n x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ で与えられているから，

$$\int_{U_i \cap B} \omega = -\int_{U_i \cap B} a_n(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0) dx_1 \cdots dx_{n-1}$$

これで (II) の場合にも，$\int_D d\omega = \int_B \omega$ が証明されたことになる．

Q．始めから考えると，ずい分長い証明でしたね．応用は広いわけですね．

A．もちろんそうです．2 次元の場合は，これまでにもお話ししてきたわけです．n 次元の例ですと，その例のためにいろいろの準備の要ることが多いのです．ここでは，ほんの 1 つの例として，1 変数の複素関数のコーシーの積分定理に当るものを多変数の場合に考えたものをお話ししておきましょう．

3. 複素積分への応用

$f(z)$ が複素変数 z についての正則関数のとき，閉曲線 c に沿っての積分を考えると，

$$\int_c f(z) dz = 0 \qquad (1)$$

であるというのが，コーシーの積分定理である．また，点 a のまわりを正の向きに 1 周する線 c について，

$$\int_c \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a) \qquad (2)$$

というのが，コーシーの積分公式である．

これらを n 個の複素変数 $z_1, \cdots, z_n$ についての正則関数へ拡張するのには，いくつかの方法があるが，ここではその 1 つについて述べる．

まず，$j=1, 2, \cdots, n$ として，

$$z_j = x_j + y_j i \qquad (i=\sqrt{-1},\ x_j, y_j \text{ は実数})$$

とおくと，$z_1, z_2, \cdots, z_n$ の関数

$$w = u + vi \qquad (u, v \text{ は実数})$$

は $2n$ 個の実変数 $x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots, x_n, y_n$ についての関数である．この w が $z_1, \cdots, z_n$ の正則関数であるというのは，

$$\frac{\partial}{\partial z_j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}-i\frac{\partial}{\partial y_j}\right),\qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}+i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$$

によって $\dfrac{\partial}{\partial z_j}$, $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$ を定義するとき,

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}_j}=0$$

となっていることであるとする．このとき,

$$dw=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial w}{\partial z_j}dz_j \tag{3}$$

となる．また, $dz_j=dx_j+idy_j$, $d\bar{z}_j=dx_j-idy_j$ から,

$$dx_j=\frac{1}{2}(dz_j+d\bar{z}_j),\qquad dy_j=\frac{1}{2i}(dz_j-d\bar{z}_j)$$

したがって, $x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n$ についての微分形式は $dz_1,d\bar{z}_1,\cdots,dz_n,d\bar{z}_n$ についての微分形式と考えられる．そして, ω_1,ω_2 が実数値をとる $2n-1$ 階の微分形式のときは, $\omega=\omega_1+i\omega_2$ について，ストークスの定理

$$\int_D d\omega=\int_B \omega$$

を適用することができる．

Q．こうしたことは，いちいち確かめる必要がありますね．

A．そうです．形式的にやれることですが，そうしなければいけません．しかしここではいちいちやりません．また，ゆっくりやっておいて下さい．

そこで, (2) に当ることを考えてみよう．まず，この式は,

$$\Omega(z)=\frac{dz}{iz} \tag{4}$$

とおくと,

$$\int_c f(z)\Omega(z-a)=2\pi f(a)$$

と書き直されるが，この $\Omega(z)$ を使うと, $z=re^{i\theta}$ のとき $d\theta$ が,

$$d\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{dz}{iz}-\frac{d\bar{z}}{i\bar{z}}\right)=\frac{1}{2}(\Omega+\bar{\Omega})$$

と表わされ, r が一定ならば, $d\theta=\Omega$ となっている．

このことから考えて, n 個の複素変数 $z_1,\cdots,z_n$ の場合に上の $\Omega(z)$ に当るものを見つけようというわけである．

まず，一般に l 次元のユークリッド空間で，原点を中心とする半径1の球面

$$\sum_{j=1}^{l}x_j^2=1$$

を考えると，その面積素片は,

$$\Omega_0=\sum_{j=1}^{l}(-1)^{j-1}x_j dx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_{j-1}\wedge dx_{j+1}\wedge\cdots\wedge dx_l \tag{5}$$

で与えられる．

そこで，複素 n 次元の空間 C^n を考え，その中の球面

$$\sum_{k=1}^{n}u_k\bar{u}_k=1 \tag{6}$$

1変数 $z=x+yi$ の複素関数 $w=u+vi$ について,

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}=0$$

というのがコーシー・リーマンの条件,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

になる．

$l=3$ でいえば,

$$\Omega_0=x_1dx_2\wedge dx_3+x_2dx_3\wedge dx_1+x_3dx_1\wedge dx_2$$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ だから，これは,

$$x_3^{-1}dx_1\wedge dx_2$$

ともなる．

の面積素片 Ω_0 を考えると，これは，

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n}\bar{u}_k du_k, \qquad c_n=\frac{2}{(n-1)!}\left(\frac{1}{2i}\right)^n \tag{7}$$

を使って次のように表わすことができる．

$$\Omega_0=c_n\sigma\wedge(d\sigma)^{n-1} \tag{8}$$

$(d\sigma)^{n-1}$ は $n-1$ 個の $d\sigma$ の外積を表わす．
$d\sigma=\sum_k d\bar{u}_k\wedge du_k$

Q．これは，$u_k=x_k+y_ki$ $(k=1, 2, \cdots, n)$ とおくと，(5) が (8) の形になるというわけですね．もっとも，(5) の $x_1, \cdots, x_l$ の代わりに $x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots, x_n, y_n$ がくるのですが．

A．そうです．ここで，(6), (7) から

$$\sigma=-\bar{\sigma}=i\sum_k(x_kdy_k-y_kdx_k), \qquad d\sigma=2i\sum_k dx_k\wedge dy_k$$

といったことが出ます．これによって計算すればよいでしょう．

なお，C^n の方向づけは，座標で $x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots, x_n, y_n$ の順で与えます．また，球面での方向づけは 157ページの方法でつけることにしておきます．

そこで，C^n の任意の点を $z=(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ とし，

$$s=r^2=\sum_k z_k\bar{z}_k \quad (r>0), \qquad \rho=\sum_k \bar{z}_kdz_k, \qquad s_k=ru_k$$

以下 $\sum_{k=1}^{n}=\sum_k$ で k も省略する．

とおくと，

$$\sigma=\sum\bar{u}_kdu_k=\sum r^{-1}\bar{z}_kd(r^{-1}z_k)=s^{-1}\rho-(2s)^{-1}ds$$
$$d\sigma=-s^{-2}ds\wedge\rho+s^{-1}d\rho$$

これらを (8) に代入すると，$ds=\rho+\bar{\rho}$ によって，

$$\Omega_0=c_ns^{-n}\left(\rho-\frac{1}{2}ds\right)\wedge(d\rho)^{n-1}=\frac{1}{2}c_ns^{-n}(\rho-\bar{\rho})\wedge(d\rho)^{n-1}$$

そこで，

$$\Omega=c_ns^{-n}\rho\wedge(d\rho)^{n-1} \tag{9}$$

とおくと，

$$\overline{d\rho}=d\bar{\rho}=\sum dz_k\wedge d\bar{z}_k=-\sum d\bar{z}_k\wedge dz_k=-d\rho$$

であることから，$\bar{\Omega}=-c_ns^{-n}\bar{\rho}\wedge(d\rho)^{n-1}$ となり，

$$\Omega_0=\frac{1}{2}(\Omega+\bar{\Omega})$$

また，$\rho\wedge(d\rho)^{n-1}$ を計算すると，

$$\rho\wedge(d\rho)^{n-1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!$$
$$\times\sum(-1)^{k-1}\bar{z}_kd\bar{z}_1\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_{k-1}\wedge d\bar{z}_{k+1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_n\wedge dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n \tag{10}$$

この (9) で定義された Ω は次の性質をもつ．

(A) $d\Omega=0$

(B) $dz_k\wedge\Omega=0 \qquad (k=1, 2, \cdots, n)$

(C) 原点を中心とする球面上では，Ω は原点に対する立体角素片になる．

ここで，立体角というのは，原点からひいた半直線によって，C^n を原点を中心とする単位球面上へ移すとき，この球面上にできる面積のことである．

証明．(A) は次のようにして確かめられる．まず

$$d(s^{-n}\rho\wedge(d\rho)^{n-1})=-ns^{-n-1}ds\wedge\rho\wedge(d\rho)^{n-1}+s^{-n}(d\rho)^n \qquad (11)$$

ところが，

$$ds\wedge\rho\wedge(d\rho)^{n-1}=(\rho+\bar{\rho})\wedge\rho\wedge(d\rho)^{n-1}=\bar{\rho}\wedge\rho\wedge(d\rho)^{n-1}$$
$$=(\sum z_k d\bar{z}_k)\wedge(\sum \bar{z}_k dz_k)$$
$$\wedge(n-1)!(\sum d\bar{z}_1\wedge dz_1\wedge\cdots$$
$$\cdots\wedge d\bar{z}_{k-1}\wedge dz_{k-1}\wedge d\bar{z}_{k+1}\wedge dz_{k+1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_n\wedge dz_n)$$
$$=(n-1)!\sum z_k\bar{z}_k d\bar{z}_1\wedge dz_1\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_n\wedge dz_n=\frac{1}{n}s(d\rho)^n$$

したがって，(11) は 0 となり， $d\Omega=0$

(B) は (10) によって明らかに成り立つ．

(C) は，(9) で $z=ru$ (r は一定) とおくと，(8) に帰着することからわかる．(証明終)

この (A) (B) (C) の性質を使って，コーシーの積分公式 (2) の拡張が次のように得られる．

まず，C^n を実数の集合 R をもとにした $2n$ 次元の空間 R^{2n} とみて，C^n の領域 D が155ページで述べた正則な境界をもっているとする．そこで，(9) の Ω を $\Omega(z)$ とおいて，$z=(z_1,\cdots,z_n)$ のところへ $z-a=(z_1-a_1,\cdots,z_n-a_n)$ とおいた $\Omega(z-a)$ を考えると，次の定理が成り立つ．これは，マルチネリ・ボツホナーの定理といわれている． Martinelli-Bochner

定理 $f(z)$ は C^n のある開集合 U で正則な関数とする．D は U にふくまれる有界な領域で，正則な境界 ∂D をもっているとすると，D の内点 a に対して，

$$\int_{\partial D}f(z)\Omega(z-a)=I_{2n-1}f(a) \qquad (12)$$

$I_{2n-1}=\dfrac{2\pi^n}{(n-1)!}$

ここで，I_{2n-1} は C^n の単体球面の面積である．

証明．まず，Ω の性質 (A) (B) によって，

$$d(f(z)\Omega(z-a))=df(z)\wedge\Omega(z-a)+f(z)d\Omega(z-a)=0. \qquad (13)$$

$df(z)=\sum_j \dfrac{\partial f}{\partial z_j}dz_j$

$dz_k\wedge\Omega(z-a)=0$

そこで，a を中心として十分小さい半径 ε で作った球を D から除いてできる領域を D_ε とし，この球面を S_ε として，D_ε と $f(z)\Omega(z-a)$ にストークスの定理を適用すると，

$$\int_{D_\varepsilon}d(f(z)\Omega(z-a))=\int_{\partial D}f(z)\Omega(z-a)-\int_{S_\varepsilon}f(z)\Omega(z-a)$$

(13) によると，左辺は 0 であって，

$$\int_{\partial D}f(z)\Omega(z-a)=\int_{S_\varepsilon}f(z)\Omega(z-a)$$

$\varepsilon\to 0$ とすれば，Ω の性質 (C) によって右辺は $I_{2n-1}f(a)$ へ近づいていくので，(12) が導かれたことになる．(証明終)

この証明でわかるように，点 a が D の外にあるときは，

$$\int_{\partial D}f(z)\Omega(z-a)=0$$

である．これと (12) が (1) (2) に当る定理である．

Q．筋はよくわかりますが，計算はめんどうでしたね．応用はいろいろあるのでしょうね．

A．いや，１変数の場合のようには行かないと思います．それは，１変数のときは，$f(z)$ の特異点で留数というものが考えられて，これが大変有効に働きました．多変数のときは，特異点のことが，もっと複雑になってそううまくいかないのです．

Q．１変数のときは，実変数の定積分で，ふつうの方法ではやりにくいものが複素積分を使ってうまく行くことがありましたが，ああしたことはいかがですか．

A．それも，上にお話しした事情でそううまくはいきません．ただ，関数 $\dfrac{e^{iz}}{z}$ を使って，

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \tag{14}$$

を証明することがありましたが，あれに当るものとしては，

$$f(z_1, z_2) = e^{i(z_1+z_2)}$$

を使って，

$$\int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-x_2}\sin(x_1+x_3)}{(x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2)^2}\, x_3\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = \frac{\pi^2}{4} \tag{15}$$

を導くぐらいのことはできます．

この場合，(4) によると，
$\dfrac{e^{iz}}{z}\,dz = ie^{iz}\Omega(z)$

Q．(14) は，フーリエ解析などでは基本となる式でしたが，(15) はどうなのですか．

A．そうしたことはあまりわかりません．このへんで，この講座も終りにします．

Q．よくわかったことも，あまりわからないこともありましたが，またゆっくり考えてみます．

A．どうぞそうして下さい．

参　考　文　献

この講義の下敷きになっているのは，次の書物やノートである．

E. Cartan　Leçons sur les invariants intégraux　1922.

E. Cartan　Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann　1951.

E. Cartan　La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielles 1937.

C. Caratheodory　Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung　1935.

S. S. Chern　（陳省身）の微分幾何に関する講義．

また，この講義で，テンソル代数（第1章），微分多様体の基礎（第2章）では，基本的なことの証明を必ずしもていねいにやっていない．それらについては，次の書物を参考にして頂くとよい．

松島　与三　　多様体入門　　裳華房

村上　信吾　　多様体　　共立出版

志賀　浩二　　近代ベクトル解析入門　　広川書店

数学専攻でないかたがたをふくめての微分形式への入門書としては，

フランダース（岩堀長慶訳）　微分形式の理論　　岩波書店

がある．動座標系の方法で書かれた書物としては，

佐々木重夫　　微分幾何学　　共立出版

栗田　　稔　　リーマン幾何　　至文堂

栗田　　稔　　積分幾何学　　共立出版

などがある．

索　　引

（著者の紹介）
栗田　稔（くりた　みのる）
昭和12年　東京大学理学部数学科卒
昭和24年　名古屋大学教養部教授
元名古屋大学工学部教授・理学博士
主要著書　微分積分学（学術図書），リーマン幾何（至文堂），いろいろな曲線（共立出版），
現代幾何学（筑摩書房），複素数と複素関数（現代数学社），線形数学序説（現代数学社）他

微分形式とその応用

2002年6月22日　　初版　第1刷

著　者　栗田　稔
発行所　株式会社　現代数学社
京都市左京区鹿ケ谷西寺之前町1
電話　075(751)0727
振替　01010-8-11144
印　刷　牟禮印刷株式会社
製　本　兼文堂

検印省略

ISBN4-7687-0280-5　C3041　　Printed in Japan